

Série ECG 1 - CORRIGÉ : vrai DS n°0001

Mathématiques approfondies— Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Inégalités de Carleman, Huygens & Trigonométrie (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Équations trigonométriques & Polynômes

1. (a) Utilisons les formules d'angle double $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$:

$$\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1$$

D'où : $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.

- (b) Posons $x = \frac{\pi}{5}$. On remarque que $4 \times \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$.

Par propriété du cosinus, $\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -a$.

En appliquant la formule de la question précédent en $x = \frac{\pi}{5}$:

$$8a^4 - 8a^2 + 1 = -a \implies 8a^4 - 8a^2 + a + 1 = 0$$

- (c) Évaluons le polynôme $P(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1$ en quelques valeurs simples :

- $P(-1) = 8(-1)^4 - 8(-1)^2 + (-1) + 1 = 8 - 8 - 1 + 1 = 0$.

- $P(1/2) = 8\left(\frac{1}{16}\right) - 8\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} + 1 = 0$.

-1 et $\frac{1}{2}$ sont deux racines évidentes de P . On peut donc factoriser $P(x)$ par $(x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1$.

En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $2x^2 + x - 1$, on obtient :

$$P(x) = (x+1)(2x-1)(4x^2 - 2x - 1) = (2x^2 + x - 1)(4x^2 - 2x - 1)$$

- (d) Puisque $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, on a $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3} \implies a > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Ainsi $a \neq -1$ et $a \neq \frac{1}{2}$, donc a est obligatoirement racine du facteur du second degré :

$$4a^2 - 2a - 1 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4(4)(-1) = 20 = (2\sqrt{5})^2$.

Les deux solutions réelles sont $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} > 0$.

Comme $a > 0$, on conclut : $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

2. (a) Pour tout $x \neq 0[\pi]$, transformons le produit $2\sin(x)(\cos(x) + \cos(3x))$ en utilisant la formule d'implication $2\sin(A)\cos(B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$:

$$2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(3x) = \sin(2x) + (\sin(4x) - \sin(2x)) = \sin(4x)$$

Puisque $\sin(x) \neq 0$, en divisant par $2\sin(x)$, on retrouve : $\cos(x) + \cos(3x) = \frac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$.

- (b) Appliquons cette formule en $x = \frac{\pi}{5}$:

$$a + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

Or $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. D'où : $a + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

(c) En linéarisant le produit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$:

$$a \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right]$$

Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 2a^2 - 1$. Comme $4a^2 - 2a - 1 = 0 \implies 2a^2 - 1 = a - \frac{1}{2}$, on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = a - \frac{1}{2}$.

Ainsi :

$$a \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \left[-a + a - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{4}$$

(d) Les réels a et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ ont pour somme $S = \frac{1}{2}$ et pour produit $P = -\frac{1}{4}$.

Ils sont donc les deux solutions de l'équation du second degré :

$$x^2 - Sx + P = 0 \iff x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \iff 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

Comme $a > 0$, la résolution donne à nouveau de manière directe : $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2 — Équation fonctionnelle

- (a) Supposons qu'il existe une fonction f vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x - f(y)) = 2 - x - y$. Fixons un $y \in \mathbb{R}$ et évaluons l'égalité en $x = f(y)$:

$$f(f(y) - f(y)) = 2 - f(y) - y \implies f(0) = 2 - f(y) - y \implies f(y) + y = 2 - f(0)$$

Comme le membre de droite est une constante indépendante de y , la quantité $f(y) + y$ est constante pour tout $y \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $f(y) = (2 - f(0)) - y$. En évaluant en $y = 0$, on obtient :

$$f(0) = 2 - f(0) \implies 2f(0) = 2 \implies \mathbf{f(0) = 1}$$

- (b) En injectant $y = 0$ et $f(0) = 1$ dans l'équation fonctionnelle initiale :

$$f(x - f(0)) = 2 - x - 0 \implies \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f(x - 1) = 2 - x}$$

- (c) Effectuons le changement de variable $u = x - 1$ (soit $x = u + 1$) :

$$f(u) = 2 - (u + 1) = 1 - u$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$.

2. **Synthèse** : Réciproquement, soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x - f(y)) = f(x - (1 - y)) = f(x - 1 + y) = 1 - (x - 1 + y) = 2 - x - y$$

La fonction $f(x) = 1 - x$ est bien solution.

Conclusion : L'unique fonction répondant au problème est $f : x \mapsto 1 - x$.

Exercice 3 — Inégalité arithmético-géométrique & Inégalité de Carleman

1. Soit $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie sur $] -1, +\infty[$. g est dérivable et $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
 $g'(x) \leq 0$ sur $] -1, 0]$ et $g'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. g admet un minimum absolu en $x = 0$ valant $g(0) = 0$.

Par conséquent, pour tout $x > -1$, $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire : $\ln(1+x) \leq x$.

2. (a) Soit $A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > 0$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $x_i = \frac{a_i}{A} - 1 > -1$.

D'après la question 1, $\ln(1+x_i) \leq x_i$, d'où : $\ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \leq \frac{a_i - A}{A}$.

(b) Sommons ces n inégalités pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i - A}{A} = \frac{1}{A} \left(\sum_{i=1}^n a_i - nA \right) = \frac{nA - nA}{A} = 0$$

D'où : $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \leq 0$.

- (c) Par propriétés des logarithmes, $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{A}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{A}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{A^n}\right) \leq 0$.

En passant à l'exponentielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$) :

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{A^n} \leq 1 \implies \prod_{i=1}^n a_i \leq A^n \implies \sqrt[n]{a_1 \times \dots \times a_n} \leq \frac{\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n}{\mathbf{n}}$$

3. (a) En décomposant en éléments simples : $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{(j+1) - j}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$.

On a donc $a = 1$ et $b = -1$.

(b) En utilisant la décomposition précédente et une sommation télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j+1} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{w_{k-1}}{k} \\ &= \frac{w_1}{1} + \sum_{j=2}^n \frac{w_j - w_{j-1}}{j} - \frac{w_n}{n+1} \end{aligned}$$

Or par définition, $w_1 = u_1$ et $w_j - w_{j-1} = ju_j$. Ainsi $\frac{w_j - w_{j-1}}{j} = u_j$.

On en déduit : $\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j(j+1)} = \sum_{k=1}^n u_k - \frac{w_n}{n+1}$.

- (c) Puisque la suite (u_n) est constituée de termes positifs, $w_n = \sum_{k=1}^n ku_k \geq 0$, donc $-\frac{w_n}{n+1} \leq 0$.

Il vient immédiatement : $\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j(j+1)} \leq \sum_{j=1}^n u_j$.

4. (a) D'après la question 1 appliquée à $x = \frac{1}{n} > 0$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

En multipliant par $n > 0$ puis en passant à l'exponentielle : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

(b) Exprimons le produit télescopique :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{2^1}{1^1} \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^3}{3^3} \times \dots \times \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(\mathbf{n}+1)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}$$

Comme chaque facteur vérifie $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e$, le produit de n facteurs est majoré par e^n :

$$\frac{(\mathbf{n} + \mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \leq \mathbf{e}^{\mathbf{n}} \implies (n + 1)^n \leq e^n n! \implies \frac{(n + 1)^n}{e^n} \leq n! \implies (\mathbf{n}!)^{1/\mathbf{n}} \geq \frac{\mathbf{n} + \mathbf{1}}{\mathbf{e}}$$

5. (a) $a_1 \times \dots \times a_j = (1 \cdot u_1) \times (2 \cdot u_2) \times \dots \times (j \cdot u_j) = (1 \times 2 \times \dots \times j) \times (u_1 \times \dots \times u_j) = \mathbf{j}! \times (\mathbf{u}_1 \times \dots \times \mathbf{u}_j)$.
 (b) Par définition de w_j , $\frac{a_1 + \dots + a_j}{j} = \frac{\mathbf{w}_j}{\mathbf{j}}$.
 (c) D'après l'inégalité arithmético-géométrique appliquée aux réels $a_1, \dots, a_j > 0$:

$$(a_1 \times \dots \times a_j)^{1/j} \leq \frac{a_1 + \dots + a_j}{j} \implies (j! \cdot u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq \frac{w_j}{j}$$

En divisant par $(j!)^{1/j} > 0$: $(u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq \frac{w_j}{j \times (j!)^{1/j}}$.

6. D'après la question 4.(b) au rang j , $(j!)^{1/j} \geq \frac{j+1}{e} \implies \frac{1}{(j!)^{1/j}} \leq \frac{e}{j+1}$.

En injectant ceci dans le résultat de la question 5.(c) :

$$(u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq \frac{w_j}{j} \times \frac{e}{j+1} = e \frac{w_j}{j(j+1)}$$

En sommant pour j allant de 1 à n et en appliquant l'inégalité de la question 3.(c) :

$$\sum_{j=1}^n (u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq e \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j(j+1)} \leq e \sum_{j=1}^n u_j$$

On obtient l'**Inégalité de Carleman** : $\sum_{j=1}^n (u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq e \sum_{j=1}^n u_j$.

Exercice 4 — Inégalité de Huygens

1. Soit $f : x \mapsto 2 \sin x + \tan x - 3x$.

- (a) La fonction $\tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ainsi : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- (b) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathcal{D}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x + (1 + \tan^2 x) - 3 = 2 \cos x + \tan^2 x - 2 = 2 \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\ &= 2 \cos x + \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \frac{2 \cos^3 x + 1 - \cos^2 x - 2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

- (c) Considérons le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

On observe que $P(1) = 2 - 3 + 1 = 0$. 1 est racine double car $P'(1) = 6(1)^2 - 6(1) = 0$.

On peut donc factoriser $P(X)$ par $(X - 1)^2$:

$$2X^3 - 3X^2 + 1 = (X - 1)^2(2X + 1)$$

Pour tout $X \in [0, 1]$, $(X - 1)^2 \geq 0$ et $2X + 1 \geq 1 > 0$.

Par conséquent, **pour tout** $X \in [0, 1]$, $2X^3 - 3X^2 + 1 \geq 0$.

(d) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $X = \cos(x) \in]0, 1]$.

Par la question précédente, le numérateur $P(\cos x) = 2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$ est positif ou nul. Comme le dénominateur $\cos^2 x > 0$, on a $f'(x) \geq 0$ **sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est donc dressée croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $f(0) = 2 \sin(0) + \tan(0) - 0 = 0$, on en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire l'**Inégalité de Huygens** :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x$$

(e) **Non, l'inégalité n'est pas toujours vraie.**

Par exemple, prenons $x = \frac{3\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \{\pi\}$:

- $2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$
- $3x = \frac{9\pi}{4} \approx 7,068.$

Ici $2 \sin x + \tan x < 3x$. L'inégalité est donc fausse sur cet intervalle.