

Série ECG 1 - vrai DS n°0001

Mathématiques approfondies — Septembre 2026, Quelquepart

Inégalités de Carleman, Huygens & Trigonométrie (3h)

Profil : [Classique ECG]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : **○

Exercice 1 — Équations trigonométriques & Polynômes

Pour tout l'exercice, on pose $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- (b) En déduire que a est solution de l'équation :

$$8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$$

- (c) En déterminant deux racines évidentes de cette équation (l'une d'elles n'étant pas entière), factorisez-la.
- (d) Déterminer la valeur exacte de a .
2. (a) Démontrer la formule :

$$\cos(x) + \cos(3x) = \frac{\sin(4x)}{2\sin(x)} \quad (\text{quand cela a un sens})$$

- (b) En déduire la valeur de $a + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
- (c) Calculer $a \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
- (d) En déduire une équation du second degré vérifiée par a , et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

Exercice 2 — Équation fonctionnelle

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

1. On suppose donc qu'une telle fonction existe.
 - (a) Prouver que $f(0) = 1$.
 - (b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x - 1) = 2 - x$$

- (c) En déduire l'expression de la fonction f .
2. Conclure.

Exercice 3 — Inégalité arithmético-géométrique & Inégalité de Carleman

Notations. Considérons $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$, on note $\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ et en

particulier $n! = \prod_{k=1}^n k$.

Rappel. Pour tout réel $x \geq 0$, on note $\sqrt[n]{x}$ ou encore $x^{1/n}$, l'unique réel positif solution de l'équation $t^n = x$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+$. Pour $n = 2$, on note simplement $\sqrt{x}$ pour $\sqrt[2]{x}$.

On se donne dans tout ce problème une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres positifs, et on pose, pour tout entier $j \geq 1$:

$$w_j = \sum_{k=1}^j k \times u_k$$

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. Le but de cette question est de montrer l'**Inégalité Arithmético-Géométrique** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \sqrt[n]{a_1 \times \dots \times a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

- (a) On pose $A := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, montrer à l'aide de 1. que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \leq \frac{a_i - A}{A}$$

- (b) En déduire que $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \leq 0$.
- (c) Montrer alors l'**Inégalité Arithmético-Géométrique**.
3. (a) Donner deux réels a et b tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{j(j+1)} = \frac{a}{j} + \frac{b}{j+1}$$

- (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j(j+1)} = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \frac{w_n}{n+1}$$

- (c) Conclure que :

$$\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{j(j+1)} \leq \sum_{j=1}^n u_j$$

4. (a) Montrer à l'aide de 1. que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

En déduire que :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$$

puis une minoration de $(n!)^{1/n}$.

5. Soit $j \geq 1$. On définit les réels $a_1, \dots, a_j$ par $a_k = k \times u_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, j \rrbracket$.

(a) Montrer que $a_1 \times \dots \times a_j = j! \times (u_1 \times \dots \times u_j)$.

(b) Exprimer $\frac{a_1 + \dots + a_j}{j}$ en fonction de w_j .

(c) En appliquant l'**Inégalité Arithmético-Géométrique** aux a_k , en déduire que :

$$(u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq \frac{w_j}{j \times (j!)^{1/j}}$$

6. En déduire l'**Inégalité de Carleman** :

$$\sum_{j=1}^n (u_1 \times \dots \times u_j)^{1/j} \leq e \sum_{j=1}^n u_j$$

Exercice 4 — Inégalité de Huygens

1. Soit $f : x \mapsto 2 \sin x + \tan x - 3x$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera $\mathcal{D}$.

(b) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.

(c) Déterminer le signe pour $x \in [0, 1]$ de la quantité $2x^3 - 3x^2 + 1$.

(d) En déduire l'**Inégalité de Huygens** :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 2 \sin x + \tan x \geq 3x$$

(e) L'inégalité est-elle encore vraie pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$?