

Série ECG 1 - CORRIGÉ : vrai DS n°0002

Mathématiques approfondies — Janvier 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Fonctions réciproques, Équations fonctionnelles, Suites implicites & Produits infinis (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Fonctions circulaires réciproques

1. Par lecture des valeurs usuelles des fonctions trigonométriques :

- $\arccos(0)$ est l'unique élément $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = 0$, donc $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin(1)$ est l'unique élément $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha) = 1$, donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est l'unique élément $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2. • $\cos(2\pi) = 1$, d'où $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0$.

- $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, d'où $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

3. Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\theta = \arcsin(-x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Par définition, $\sin(\theta) = -x \implies \sin(-\theta) = x$.

Comme $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a aussi $-\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Par unicité dans la définition du sinus réciproque, $-\theta = \arcsin(x)$, soit $\theta = -\arcsin(x)$.

On conclut que : $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

4. Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\alpha = \arccos(-x) \in [0, \pi]$.

On a $\cos(\alpha) = -x \implies \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) = x$.

Comme $\alpha \in [0, \pi]$, on a $\pi - \alpha \in [0, \pi]$.

Ainsi, $\pi - \alpha = \arccos(x)$, d'où $\alpha = \pi - \arccos(x)$.

On conclut que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

5. Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\alpha = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On a $\sin(\alpha) = x$. Posons $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Comme $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il vient $\beta \in [0, \pi]$.

De plus, $\cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) = x$.

Par définition de $\arccos$, $\beta = \arccos(x)$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \arccos(x)$.

D'où : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

6. Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\theta = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sur cet intervalle, $\cos(\theta) \geq 0$.

Par l'identité pythagoricienne $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on en déduit que :

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = \sqrt{1 - x^2}$$

D'où : $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

7. La fonction $\arcsin$ est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Comme $0 \leq \frac{3}{5} = 0,6 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$, on a $0 \leq \arcsin \frac{3}{5} \leq \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

De même, $0 \leq \frac{5}{13} \approx 0,385 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $0 \leq \arcsin \frac{5}{13} \leq \frac{\pi}{4}$.

$\arcsin \frac{3}{5}$ et $\arcsin \frac{5}{13}$ appartiennent donc tous les deux à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

8. Posons $A = \arcsin \frac{3}{5}$ et $B = \arcsin \frac{5}{13}$.

Comme $A, B \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, leur somme $A + B$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Développons $\sin(A + B)$ avec la formule d'addition :

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B)$$

On sait que $\sin(A) = \frac{3}{5}$ et $\cos(A) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

De même, $\sin(B) = \frac{5}{13}$ et $\cos(B) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$.

Ainsi :

$$\sin(A + B) = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36 + 20}{65} = \frac{56}{65}$$

Comme $A + B \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin(A + B) = \frac{56}{65}$, on en déduit par injectivité du sinus sur cet intervalle que :

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$$

Exercice 2 — Équation fonctionnelle sur $\mathbb{Q}$

1. **ANALYSE.** Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(a) En évaluant l'égalité pour $x = y = 0$:

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 2f(0) \implies \mathbf{f(0) = 0}$$

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(n) = nf(1)$.

• **Initialisation** ($n = 0$) : $f(0) = 0 = 0 \times f(1)$. La propriété est vraie au rang 0.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = nf(1)$.

$f(n + 1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n + 1)f(1)$. La propriété est transmise au rang $n + 1$.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$.

(c) Soit $m \in \mathbb{Z}_-$. On peut écrire $m = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$f(m + n) = f(0) = 0 \implies f(m) + f(n) = 0 \implies f(m) = -f(n).$$

D'après la question précédente, $f(n) = nf(1)$, d'où $f(m) = -nf(1) = mf(1)$.

Ainsi : $\forall m \in \mathbb{Z}, f(m) = mf(1)$.

(d) Posons $a = f(1)$. Soit $x \in \mathbb{Q}$, s'écrivant $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

En appliquant l'additivité de f sur une somme de q termes identiques égaux à $\frac{p}{q}$:

$$f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = f\left(\sum_{k=1}^q \frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^q f\left(\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

Comme $p \in \mathbb{Z}, f(p) = pf(1) = pa$. On en déduit :

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = pa \implies f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a \implies \mathbf{f(x) = ax}$$

2. **SYNTHÈSE.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

Toute fonction linéaire $x \mapsto ax$ est donc bien solution.

3. **CONCLUSION.** Les solutions de l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{Q}$ sont exactement les fonctions linéaires : $f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 — Étude d'une suite implicite

PARTIE I —

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
sa dérivée vaut $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$.
 f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{R}$, le théorème de la bijection assure que l'équation $(E_n) : f(x) = n$ admet **une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n** .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n)$.
Comme f est strictement croissante, $f(x_{n+1}) > f(x_n) \implies x_{n+1} > x_n$.
La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.
4. $f(1) = \ln(1) + 1 = 1$, d'où $x_1 = 1$. On admet $x_2 \approx 1,55$.

PARTIE II —

1. Pour tout $t \geq 1, t \geq \sqrt{t} \implies \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$.
Par intégration sur l'intervalle $[1, x]$ avec $x > 1$: $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
2. On calcule : $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$ et $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$.
Ainsi, pour tout $x > 1, 0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$.
En divisant par $x > 1$: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.
Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes donne : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. Soit $g : x \mapsto x - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
 g admet un minimum absolu en $x = 1$ valant $g(1) = 1 > 0$.
D'où $x - \ln(x) > 0 \implies \ln(x) < x$ pour tout $x > 0$.
4. On a $\ln(x_n) + x_n = n$.
D'une part, comme $\ln(x_n) < x_n$, il vient $n = \ln(x_n) + x_n < 2x_n \implies x_n > \frac{n}{2}$.
D'autre part, comme $x_n \geq x_1 = 1, \ln(x_n) \geq 0$, donc $n = \ln(x_n) + x_n \geq x_n \implies x_n \leq n$.
On conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
5. Comme $x_n \geq \frac{n}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

PARTIE III —

1. Divisons l'égalité $\ln(x_n) + x_n = n$ par n : $\frac{\ln(x_n)}{n} + \frac{x_n}{n} = 1$.
De l'encadrement $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$, on déduit $0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.
Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$.
Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.
2. Écrivons $\frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n \cdot \frac{x_n}{n})}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(\frac{x_n}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(\frac{x_n}{n})}{\ln(n)}$.
Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, par continuité du logarithme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)} = 0$, d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$.

3. Soustrayons les égalités $\ln(x_{n+1}) + x_{n+1} = n + 1$ et $\ln(x_n) + x_n = n$:

$$(x_{n+1} - x_n) + \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1 \implies x_{n+1} - x_n = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

Puisque $x_n \sim n$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 1$.

4. (a) Puisque $n - x_n = \ln(x_n)$, on a $u_n = \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)}$.

$$\text{Ainsi } u_n - 1 = \frac{\ln(x_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(\mathbf{x}_n/\mathbf{n})}{\ln(\mathbf{n})}.$$

(b) D'après la question III.2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(c) Réécrivons $n(1 - u_n) = -n \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$.

$$\text{Notons que } 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{\ln(x_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En utilisant l'équivalent usuel $\ln(1 - u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -u$ avec $u = 1 - \frac{x_n}{n}$:

$$\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \sim -\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = -\frac{\ln(x_n)}{n}$$

D'où $n \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \sim -\ln(x_n)$.

$$\text{Ainsi } n(1 - u_n) \sim \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = 1$.

Exercice 4 — Produits infinis & Trigonométrie

1. (a) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

• **Initialisation** ($n = 1$) : Le membre de gauche vaut $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\text{Le membre de droite vaut } \frac{\sin(\theta)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

En utilisant la formule de duplication $\sin(2u) = 2 \sin(u) \cos(u)$ au rang $u = \frac{\theta}{2^{n+1}}$:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

D'où en simplifiant par $\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \neq 0$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2^n \cdot 2 \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin(\theta)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par récurrence, l'égalité est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Réécrivons le dénominateur : $2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \theta \cdot \frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$, la limite usuelle $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \theta$$

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$.

(c) Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors $\sin(\theta) = 0$, donc $\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 0$.

De plus, pour $\theta = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}^*$), il existe un rang K à partir duquel un des facteurs s'annule (car l'argument devient un multiple impair de $\pi/2$), ce qui rend le produit nul pour tout $n \geq K$.

Si $\theta = 0$, par prolongement par continuité, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$, et tous les facteurs $\cos(0) = 1$.

La formule reste donc **entièrement vraie sur** $2\pi\mathbb{Z}$.

2. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Posons $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$.

Prenons le logarithme puis dérivons par rapport à x :

$$\ln P_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(\sin x) - n \ln(2) - \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

En dérivant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{-\frac{1}{2^k} \sin(x/2^k)}{\cos(x/2^k)} &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\frac{1}{2^n} \cos(x/2^n)}{\sin(x/2^n)} \\ - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{2^n \tan(x/2^n)} \end{aligned}$$

En multipliant par -1 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n \tan(x/2^n)} - \frac{1}{\tan x}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) = x \cdot \frac{\tan(x/2^n)}{x/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n \tan(x/2^n)} = \frac{1}{x}$.

On conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$