

Série ECG 1 - vrai DS n°0002

Mathématiques approfondies — Janvier 2026, Quelquepart.

Fonctions réciproques, Équations fonctionnelles, Suites implicites & Produits infinis (3h)

Profil : [Classique ECG]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★★

Exercice 1 — Fonctions circulaires réciproques

Définition 1. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on note $\arccos(x)$ l'unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que :

$$\cos(\alpha) = x.$$

Définition 2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on note $\arcsin(x)$ l'unique réel $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que :

$$\sin(\alpha) = x.$$

1. Que vaut $\arccos(0)$? $\arcsin(1)$? $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?
2. Que vaut $\arccos(\cos(2\pi))$? $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$?
3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
4. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.
5. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

7. Montrer que $\arcsin \frac{3}{5}$ et $\arcsin \frac{5}{13}$ appartiennent tous les deux à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
8. En développant $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$, montrer que l'on a l'égalité suivante :

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$$

Exercice 2 — Équation fonctionnelle sur $\mathbb{Q}$

L'objectif de l'exercice est de déterminer par **ANALYSE-SYNTHESE**, toutes les fonctions f , définies sur $\mathbb{Q}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. **ANALYSE.** Considérons f une fonction vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
 - (a) Déterminer $f(0)$.
 - (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1).$$

- (c) Démontrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}_-, \quad f(m) = mf(1).$$

- (d) Notons $a := f(1)$. Démontrer enfin que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.
2. **SYNTHÈSE.** Vérifier que les fonctions f de la forme $f(x) = ax$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont bien solution du problème.
 3. Conclure.

Exercice 3 — Étude d'une suite implicite

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les solutions de l'équation d'inconnue $x > 0$:

$$\ln(x) + x = n \quad (E_n).$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) + x$.

PARTIE I —

1. Étudier les variations de la fonction f et représenter brièvement sa courbe représentative.
2. Montrer (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on note x_n .
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Donner la valeur de x_1 . On admet qu'une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} -près est donnée par $x_2 \approx 1,55$.

PARTIE II —

1. Montrer que pour tout $x > 1$, on a $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) < x$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
5. Conclure sur la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

PARTIE III —

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$.
3. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $x_{n+1} - x_n$.
4. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \frac{n - x_n}{\ln n}$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 1 = \frac{\ln(x_n/n)}{\ln n}$.
 - (b) Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 - (c) Montrer que $n(1 - u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Exercice 4 — Produits infinis & Trigonométrie

Notation. Considérons $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$, on note :

$$\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

Rappel. On pourra utiliser avec profit, les deux limites usuelles suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

1. (a) Montrer par **RÉCURRENCE** que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

- (b) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

- (c) Montrer que cette formule est encore vraie si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2. En utilisant 1. (a), montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$