

Série ECG 1 — CORRIGÉ : vrai DS n°0003

Mathématiques approfondies — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Logique, Équations, Sommes géométriques dérivées & Équation fonctionnelle (2h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Logique et quantificateurs

1. Écriture formelle des négations logiques :

(a) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x > 0, \quad \varepsilon \geq x$

(b) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} > x$

(c) Rappelons que la négation de $P \implies Q$ est $P \wedge \neg Q$. La négation est donc :
 $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 3 \quad \text{et} \quad x^2 - 2x - 3 < 0$

(d) $\exists A > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists x \in [N, +\infty[, \quad \ln(x) < A$

2. Étude de la valeur de vérité de chaque proposition :

(a) **La proposition est FAUSSE** (sa négation est vraie).

Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant le réel $x = \frac{\varepsilon}{2}$, on a bien $x > 0$ et pourtant $\varepsilon \geq x$ (puisque $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$).

(b) **La proposition est FAUSSE** (sa négation est vraie).

Considérons le contre-exemple $x = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}_+$. On a $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, or $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, donc $\sqrt{x} > x$.

(c) **La proposition est VRAIE.**

Factorisons le trinôme : $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 3$. On a alors $x - 3 \geq 0$ et $x + 1 \geq 4 > 0$.

Par produit de termes positifs, $(x - 3)(x + 1) \geq 0$, d'où $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

(d) **La proposition est VRAIE.**

Elle traduit le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Soit $A > 0$. Posons $N = \lfloor e^A \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in [N, +\infty[$, on a $x \geq N > e^A$. Par stricte croissance de la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$, il vient $\ln(x) \geq \ln(e^A) = A$.

Exercice 2 — Équations et inéquations fondamentales

1. Multiplions chaque membre par 4 :

$$(7x + 9) + 4x = 2(5x) + 12 \iff 11x + 9 = 10x + 12 \iff x = 3$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3\}$.

2. Les expressions sous les valeurs absolues s'annulent en $x = 2$ et $x = -4$. Étudions l'équation selon trois intervalles :

• **Si $x < -4$:** $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ et $|2x + 8| = -(2x + 8) = -2x - 8$.

L'équation devient $2 - x = x - 2x - 8 \iff 2 - x = -x - 8 \iff 2 = -8$, ce qui est impossible.
Aucune solution sur cet intervalle.

• **Si $-4 \leq x \leq 2$:** $|x - 2| = 2 - x$ et $|2x + 8| = 2x + 8$.

L'équation devient $2 - x = x + 2x + 8 \iff 2 - x = 3x + 8 \iff 4x = -6 \iff x = -\frac{3}{2}$.
Puisque $-\frac{3}{2} = -1,5 \in [-4, 2]$, cette valeur est bien solution.

• **Si $x > 2$:** $|x - 2| = x - 2$ et $|2x + 8| = 2x + 8$.

L'équation devient $x - 2 = x + 2x + 8 \iff x - 2 = 3x + 8 \iff 2x = -10 \iff x = -5$.
Or $-5 \notin]2, +\infty[$, donc cette valeur est rejetée.

L'unique solution est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

3. Pour tout $x \neq 0$:

$$x > \frac{1}{x} \iff x - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$$

Dressons le tableau de signes de l'expression $Q(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$:

x	$-\infty$	-1	0	1
$+\infty$				
$x+1$		$-$	0	$+$
$+$				
x		$-$	$-$	0
$+$				
$x-1$		$-$	$-$	$-$
$+$				
$Q(x)$		$-$	0	$+$
$+$				

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.

4. Développons et regroupons les termes en x :

$$(3m-6)x + (4mx-7m) = 3m-3 \iff (7m-6)x - 7m = 3m-3 \iff (7m-6)x = 10m-3$$

Discutons selon les valeurs du coefficient $7m-6$:

- **Si $7m-6=0$, c'est-à-dire $m=\frac{6}{7}$:**
Le membre de gauche s'annule : $0 \cdot x = 10\left(\frac{6}{7}\right) - 3 = \frac{60-21}{7} = \frac{39}{7} \neq 0$.
L'équation n'a aucune solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.
- **Si $7m-6 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq \frac{6}{7}$:**
On peut diviser par $7m-6 \neq 0$, d'où une unique solution :

$$x = \frac{10m-3}{7m-6} \implies \mathcal{S} = \left\{ \frac{10m-3}{7m-6} \right\}$$

Exercice 3 — Somme géométrique dérivée

1. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $T_n = \frac{5^{n+1}-4^n(n+5)}{5^n-1}$ ».

- **Initialisation ($n=1$) :**
D'une part, $T_1 = 1 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$.
D'autre part, $\frac{5^{1+1}-4^1(1+5)}{5^1-1} = \frac{25-24}{1} = 1$.
 $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$T_{n+1} = T_n + (n+1) \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{5^{n+1}-4^n(n+5)}{5^n-1} + \frac{(n+1)4^n}{5^n}$$

Mettons au même dénominateur 5^n :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{5(5^{n+1}-4^n(n+5)) + (n+1)4^n}{5^n} = \frac{5^{n+2}-5 \cdot 4^n(n+5) + (n+1)4^n}{5^n} \\ &= \frac{5^{n+2} + 4^n(-5n-25+n+1)}{5^n} = \frac{5^{n+2} + 4^n(-4n-24)}{5^n} \\ &= \frac{5^{n+2} - 4 \cdot 4^n(n+6)}{5^n} = \frac{5^{(n+1)+1} - 4^{n+1}((n+1)+5)}{5^{(n+1)-1}} \end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\mathbf{T}_n = \frac{5^{n+1} - 4^n(n+5)}{5^{n-1}}$.

2. En posant $x = \frac{4}{5}$, on observe immédiatement que $\mathbf{T}_n = \mathbf{S}_n\left(\frac{4}{5}\right)$.

3. Pour tout réel $x \neq 1$, il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{x}^k = \mathbf{x} \frac{1 - \mathbf{x}^n}{1 - \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^{n+1}}{1 - \mathbf{x}}$$

4. La dérivation terme à terme d'une somme finie de fonctions dérivables donne :

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^k)' = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \mathbf{S}_n(\mathbf{x})$$

5. D'après la question 3, on a également $f_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$. Dérivons cette forme quotient :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{(1 - (n+1)x^n)(1 - x) - (x - x^{n+1})(-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{1 - x - (n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{n\mathbf{x}^{n+1} - (\mathbf{n} + 1)\mathbf{x}^n + 1}{(\mathbf{1} - \mathbf{x})^2} \end{aligned}$$

Comme $f'_n(x) = S_n(x)$, la formule est démontrée.

6. Évaluons l'expression fermée de $S_n(x)$ en $x = \frac{4}{5}$.

On a $1 - x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, d'où $(1 - x)^2 = \frac{1}{25}$, soit $\frac{1}{(1-x)^2} = 25$.

$$\begin{aligned} T_n &= S_n\left(\frac{4}{5}\right) = 25 \left(n \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right) = 25 \left(\frac{4^n}{5^{n+1}} (4n - 5(n+1)) + 1 \right) \\ &= 25 \left(\frac{4^n(-n-5)}{5^{n+1}} + 1 \right) = 25 - \frac{25 \cdot 4^n(n+5)}{5^{n+1}} = 25 - \frac{4^n(n+5)}{5^{n-1}} \\ &= \frac{25 \cdot 5^{n-1} - 4^n(n+5)}{5^{n-1}} = \frac{5^{n+1} - 4^n(\mathbf{n} + 5)}{5^{n-1}} \end{aligned}$$

Le résultat de la question 1 est bien retrouvé sans récurrence.

Exercice 4 — Recherche d'une équation fonctionnelle

1. Soit f une fonction solution de $(E_1) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x$.

(a) Évaluons (E_1) en $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} \iff \frac{3}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \iff \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{1}$$

(b) L'égalité (E_1) étant vraie pour tout réel, substituons la variable x par $1-x \in \mathbb{R}$:

$$f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1 + (1-x) \iff \mathbf{f}(\mathbf{1} - \mathbf{x}) + (\mathbf{1} - \mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{2} - \mathbf{x} \quad (\mathbf{E}_2)$$

(c) De l'équation (E_2) , on isole le terme $f(1-x)$:

$$f(1-x) = 2 - x - (1-x)f(x)$$

Injectons cette expression dans (E_1) :

$$\begin{aligned}f(x) + x(2 - x - (1 - x)f(x)) &= 1 + x \\ \iff f(x) + 2x - x^2 - (x - x^2)f(x) &= 1 + x \\ \iff f(x)(1 - x + x^2) &= 1 + x - 2x + x^2 \\ \iff f(x)(x^2 - x + 1) &= x^2 - x + 1\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$.

Par suite, pour tout réel x , $x^2 - x + 1 > 0$ et ne s'annule jamais.

On peut donc diviser par cette quantité :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + \mathbf{1}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + \mathbf{1}} = \mathbf{1}$$

2. Conclusion par analyse-synthèse :

- **Analyse** : D'après la question 1, si f est une solution du problème, alors nécessairement f est la fonction constante égale à 1.
- **Synthèse** : Réciproquement, considérons la fonction constante définie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) + xf(1 - x) = 1 + x(1) = 1 + x$$

La fonction constante vérifie bien l'équation fonctionnelle (E_1) .

L'unique solution de l'équation (E_1) est la fonction constante :

$$\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{1}$$