

Série ECG 1 — vrai DS n°0003

Mathématiques approfondies — Septembre 2026

Logique, Équations, Sommes géométriques dérivées & Équation fonctionnelle (2h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★○○

Abstraction & Raisonnement : ★○○

Exercice 1 — Logique et quantificateurs

- Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation logique formelle :
 - $\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x > 0, \quad \varepsilon < x$
 - $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leq x$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 3 \implies x^2 - 2x - 3 \geq 0$
 - $\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [N, +\infty[, \quad \ln(x) \geq A$
- Pour chacune des propositions ci-dessus, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant soigneusement la réponse (par une démonstration ou un contre-exemple explicite).

Exercice 2 — Équations et inéquations fondamentales

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\frac{7x+9}{4} + x = \frac{5x}{2} + 3$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$|x-2| = x + |2x+8|$$

- Résoudre pour $x \in \mathbb{R}^*$ l'inéquation :

$$x > \frac{1}{x}$$

- Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x en discutant selon les valeurs du paramètre m :

$$3(m-2)x + m(4x-7) = 3(m-1)$$

Exercice 3 — Somme géométrique dérivée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

Le but de cet exercice est de calculer T_n de deux manières différentes.

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{5^{n+1} - 4^n(n+5)}{5^{n-1}}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x , on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. Exprimer T_n à l'aide de la fonction S_n .
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner sans démonstration la valeur de $\sum_{k=1}^n x^k$.

4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $f'_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de $S_n(x)$.
5. En déduire, à l'aide de la question 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \neq 1$:

$$S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

6. Retrouver le résultat de la question 1 sans raisonnement par récurrence.

Exercice 4 — Recherche d'une équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (E_1)$$

1. Soit f une fonction solution de (E_1) .

- (a) Déterminer la valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x \quad (E_2)$$

- (c) En combinant judicieusement les deux équations (E_1) et (E_2) , en déduire une expression explicite de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Conclure soigneusement en donnant l'ensemble des fonctions solutions de l'équation (E_1) .