

Série ECG 1 — CORRIGÉ : vrai DS n°0004

Mathématiques approfondies — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Limites, Arctangente, Optimisation & Fonction de Lambert (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Autour du cours

1. On sait que $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n} k^2 &= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n}{6} (2(8n^2 + 6n + 1) - (2n^2 - 3n + 1)) = \frac{n}{6} (16n^2 + 12n + 2 - 2n^2 + 3n - 1) \\ &= \frac{n(14n^2 + 15n + 1)}{6} = \frac{\mathbf{n(n+1)(14n+1)}}{6}\end{aligned}$$

2. Calculs de limites :

(a) $\frac{2x \ln(x) - 2}{x^2 + x + 3} \sim_{+\infty} \frac{2x \ln(x)}{x^2} = 2 \frac{\ln(x)}{x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc la limite est **0**.

(b) Pour lever l'indétermination de la forme $+\infty - \infty$, on utilise l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = \frac{(x-1) - (x-2)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

Par composition avec le logarithme, $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, d'où la limite est $-\infty$.

(c) $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \frac{\sin(3x)}{3x}$. Comme $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, la limite vaut **3**.

(d) $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{\sqrt{x}} = \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, $\ln(1+e^{-x}) \rightarrow 0$. Le terme dominant est $\sqrt{x}$, la limite est donc $+\infty$.

3. Transformons le cosinus en sinus grâce à la relation $\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Deux sinus sont égaux si et seulement si les angles sont égaux modulo 2π ou supplémentaires modulo 2π :

- **Cas 1** : $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \iff 3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \implies x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{Z})$
- **Cas 2** : $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2k\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \implies x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{Z})$

4. $f(x) = \sqrt{\ln(x) - 1}$.

- **Domaine** : Il faut $\ln(x) - 1 \geq 0 \iff x \geq e$. Donc $\mathcal{D}_f = [\mathbf{e}, +\infty[$.
- **Dérivabilité** : La fonction racine n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il faut $\ln(x) - 1 > 0 \iff x > e$. La fonction est dérivable sur $]e, +\infty[$.
- **Dérivée** : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)-1}}$.
- **Image** : $f(e) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. f étant continue, $\text{Im}(f) = [\mathbf{0}, +\infty[$.

5. Le déterminant du système est $\Delta = (1)(4) - (m)(m) = 4 - m^2 = (2-m)(2+m)$.

- **Si** $m \notin \{-2, 2\}$, unique solution (formules de Cramer) :

$$x = \frac{-12-6m}{4-m^2} = \frac{-6(2+m)}{(2-m)(2+m)} = \frac{-6}{2-m} = \frac{6}{m-2}.$$

$$y = \frac{6+3m}{4-m^2} = \frac{3(2+m)}{(2-m)(2+m)} = \frac{3}{2-m}. \implies \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{6}{m-2}, \frac{3}{2-m} \right) \right\}$$

- Si $m = 2$, le système devient $x + 2y = -3$ et $2x + 4y = 6 \iff x + 2y = 3$.
Incompatible, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $m = -2$, le système devient $x - 2y = -3$ (deux fois).
Infinité de solutions : $\mathcal{S} = \{(2\mathbf{y} - \mathbf{3}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 — Une équation

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc $f(x) = \arctan(x) + \arctan(x^3)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Le domaine $\mathbb{R}$ est centré. De plus, arctan est impaire, donc $f(-x) = \arctan(-x) + \arctan((-x)^3) = -\arctan(x) - \arctan(x^3) = -f(x)$. f est **impaire**.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et somme :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Le graphe présente deux asymptotes horizontales $y = \pi$ et $y = -\pi$.
5. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, f est continue et strictement croissante. $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = \pi$.
 f réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, \pi[$.
Comme $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi[$, d'après le théorème de la bijection, il existe un **unique** $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = \frac{3\pi}{4}$.
6. On écrit $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$.
En factorisant par $\cos(a)\cos(b)$ au numérateur et dénominateur, il reste :

$$\tan(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{\tan(\mathbf{a}) + \tan(\mathbf{b})}{1 - \tan(\mathbf{a})\tan(\mathbf{b})}$$

7. Appliquons la fonction tangente de chaque côté de l'égalité $f(\alpha) = \frac{3\pi}{4}$:

$$\tan(\arctan(\alpha) + \arctan(\alpha^3)) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

D'après la formule de la question 6 (en posant $a = \arctan(\alpha)$ et $b = \arctan(\alpha^3)$) :

$$\frac{\alpha + \alpha^3}{1 - \alpha \cdot \alpha^3} = -1 \iff \alpha + \alpha^3 = \alpha^4 - 1 \iff \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha - 1 = 0 \text{ (après correction du signe)}$$

Re-vérifions l'équation : $\frac{\alpha + \alpha^3}{1 - \alpha^4} = -1 \iff \alpha + \alpha^3 = -1 + \alpha^4 \iff \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$.

Une racine évidente... Wait ! La factorisation adéquate est $\alpha^4 - 1 - \alpha(\alpha^2 + 1) = (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) - \alpha(\alpha^2 + 1) = (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$.

Puisque $\alpha^2 + 1 > 0$, on résout $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 5$.

Les solutions sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puisque $\alpha > 0$, la seule solution est le nombre d'or : $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3 — Trigonométrie appliquée

1. Soit H le projeté orthogonal de C sur le mur de gauche (passant par A), et K le projeté de C sur le mur du bas (passant par B). On a $HC = 3\sqrt{3}$ et $CK = 1$.
Dans le triangle rectangle en H , ACH , l'angle en C vaut α (angles alternes-internes avec l'horizontale).
Donc $\sin(\alpha) = \frac{HC}{AC} \implies AC = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)}$.
Dans le triangle rectangle en K , BCK , l'angle en C est $\frac{\pi}{2} - \alpha$, et l'angle en B vaut α .
Donc $\cos(\alpha) = \frac{CK}{CB} \implies CB = \frac{1}{\cos(\alpha)}$.
Le segment $[AB]$ mesure donc $AB = AC + CB = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$.

2. Sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, les fonctions $\sin$ et $\cos$ ne s'annulent pas. f est dérivable et :

$$f'(\alpha) = 3\sqrt{3} \left(-\frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \right) + \left(-\frac{-\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \right) = \frac{\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}$$

3. (a) Le dénominateur $\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)$ est strictement positif sur I , donc $f'(\alpha)$ est du signe du numérateur $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)$.
 (b) L'identité remarquable est : $\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2)$.
 (c) Posons $a = \sin(\alpha)$ et $b = \sqrt{3}\cos(\alpha)$. Le numérateur est $a^3 - b^3$.
 Comme $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0$ sur I , $a^3 - b^3$ est du même signe que $a - b$, c'est-à-dire $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$.
 (d) $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha) = 2 \left(\frac{1}{2}\sin(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha) \right) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.
 Ce terme s'annule en $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Il est négatif sur $]0, \frac{\pi}{3}[$ et positif sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.
4. f est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{3}[$ et croissante sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.
 Le minimum global est atteint en $\alpha = \frac{\pi}{3}$, avec :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 6 + 2 = 8$$

La longueur du segment est minimale dans cette position critique. Le tableau ne peut passer que s'il est plus petit que ce goulet d'étranglement géométrique.

La largeur maximale du tableau est donc de **8 mètres**.

Exercice 4 — Une bijection (Fonction de Lambert)

1. La fonction $f : x \mapsto xe^x$ est un produit de fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
 Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et f y est dérivable.
2. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \mathbf{0}$. En $+\infty$, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$.
3. $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} + \mathbf{1})$.
 Le signe de $f'(x)$ est celui de $x + 1$. f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Le minimum est atteint en $x = -1$ et vaut $f(-1) = -\mathbf{1}/\mathbf{e}$.
4. (Graphe laissé au lecteur : asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$, tangente horizontale en $(-1, -1/e)$, branche parabolique de direction Oy en $+\infty$).
5. Sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$, f est continue et strictement croissante.
 L'image de cet intervalle est $[f(-1), \lim_{+\infty} f] = [-\mathbf{1}/\mathbf{e}, +\infty[$.
 D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $J = [-1/e, +\infty[$.
6. $g(1) = 1e^1 = e$. Comme $W = g^{-1}$, $g(1) = e \iff \mathbf{W}(\mathbf{e}) = \mathbf{1}$.
 $g(0) = 0 \iff \mathbf{W}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
 $g(-1) = -1/e \iff \mathbf{W}(-\mathbf{1}/\mathbf{e}) = -\mathbf{1}$.
7. W , en tant que bijection réciproque, partage le même sens de variation que g .
 W est donc **strictement croissante** sur $[-1/e, +\infty[$, partant de -1 et tendant vers $+\infty$.
8. Sur $[0, +\infty[$, comme W est croissante et que $W(0) = 0$, on a bien $\forall x \geq 0, \mathbf{W}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$.
9. g est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et sa dérivée $g'(y) = e^y(y + 1)$ ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$.
 $W = g^{-1}$ est donc dérivable sur $g(]-1, +\infty[) =] -\mathbf{1}/\mathbf{e}, +\infty[$.
 En dérivant la relation $\forall x \in] -1/e, +\infty[, g(W(x)) = x$, on obtient $W'(x)g'(W(x)) = 1$, soit :

$$W'(x) = \frac{1}{g'(W(x))} = \frac{1}{e^{W(x)}(W(x) + 1)}$$

Or $g(W(x)) = x \implies W(x)e^{W(x)} = x$. Pour $x \neq 0$ (donc $W(x) \neq 0$), on a $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$.

$$W'(x) = \frac{1}{\frac{x}{W(x)}(1 + W(x))} = \frac{\mathbf{W}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}(1 + \mathbf{W}(\mathbf{x}))}$$

10. Soit $x \geq e$. Puisque W est croissante, $W(x) \geq W(e) = 1 > 0$.

De $W(x)e^{W(x)} = x$, on applique la fonction $\ln$ (tout est strictement positif) :

$$\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x) \iff W(x) = \ln(x) - \ln(W(x))$$

Comme $W(x) \geq 1$, on a $\ln(W(x)) \geq 0$. Par conséquent, $\mathbf{W}(\mathbf{x}) \leq \ln(\mathbf{x})$.

11. Comme $W(x) \leq \ln(x)$ et que la fonction $\ln$ est strictement croissante, on a $\ln(W(x)) \leq \ln(\ln(x))$.

En multipliant par -1 : $-\ln(W(x)) \geq -\ln(\ln(x))$.

En ajoutant $\ln(x)$ de part et d'autre et en utilisant l'égalité démontrée à la question 10 :

$$W(x) = \ln(x) - \ln(W(x)) \geq \ln(\mathbf{x}) - \ln(\ln(\mathbf{x}))$$

12. En posant $X = \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = \mathbf{0}$ (par croissance comparée).

13. Des questions 10 et 11, on tire pour tout $x \geq e$:

$$\ln(x) - \ln(\ln(x)) \leq W(x) \leq \ln(x)$$

En divisant par $\ln(x) > 0$:

$$1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \leq \frac{W(x)}{\ln(x)} \leq 1$$

Par le théorème des gendarmes et la limite de la question 12, on obtient bien $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{W}(\mathbf{x})}{\ln(\mathbf{x})} = \mathbf{1}$.

14. φ est continue et strictement croissante (somme de telles fonctions) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ses limites sont $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$. φ réalise donc bien une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x = \varphi^{-1}(y) \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(x) + x = y \iff e^{\ln(x)+x} = e^y \iff xe^x = e^y \iff g(x) = e^y$$

En appliquant la fonction réciproque W : $\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{W}(\mathbf{e}^{\mathbf{y}})$.