

Série ECG 1 — vrai DS n°0004

Mathématiques approfondies — Septembre 2026, Quelquepart.

Limites, Arctangente, Optimisation & Fonction de Lambert (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★○

Exercice 1 — Autour du cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme : $\sum_{k=n}^{2n} k^2$.

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \ln(x) - 2}{x^2 + x + 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{\sqrt{x}}$

3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

On fera notamment apparaître (approximativement) les points correspondant aux solutions sur le cercle trigonométrique.

4. Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{\ln(x) - 1}$$

Déterminer son image $\text{Im}(f)$.

5. Résoudre selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$$

Exercice 2 — Une équation

Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x^3)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. Étudier la parité de f .

3. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, calculer f' et en déduire les variations de f .

4. Tracer l'allure du graphe de f .

5. Montrer qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $\arctan(\alpha) + \arctan(\alpha^3) = \frac{3\pi}{4}$.

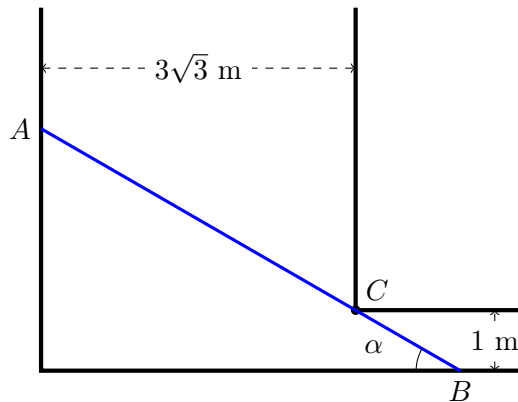
6. Soient a et b dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et tels que $a + b \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Énoncer et démontrer la formule de trigonométrie : $\tan(a + b) = \dots$

7. En déduire la valeur exacte de α .

Exercice 3 — Trigonométrie appliquée

Un couloir de musée de largeur $3\sqrt{3}$ mètres tourne à angle droit et sa largeur n'est plus que de 1 mètre. On veut transporter dans ce couloir un tableau en position verticale. L'objectif est de déterminer la largeur maximale possible du tableau que l'on peut ainsi déplacer dans le couloir sans qu'il ne se bloque.



1. Montrer que, avec les notations de la figure ci-dessus (où A et B sont en appui sur les murs extérieurs et le segment $[AB]$ passe par le coin intérieur C) :

$$AB = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Indice : il peut être utile d'introduire le point C sur le segment $[AB]$.

Dans la suite, on pose $f(\alpha) = AB$. On se propose d'étudier f sur l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Justifier que f est dérivable sur I puis calculer $f'(\alpha)$.
3. On veut déterminer le signe de f' sur I . Soit $\alpha \in I$.
 - (a) Justifier que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)$.
 - (b) Soient a et b des réels. Rappeler la factorisation de $a^3 - b^3$ par $a - b$.
 - (c) En déduire que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$.
 - (d) En déduire le signe de f' sur I .
4. Dresser le tableau de variations de f sur I . Quelle est la largeur maximale du tableau que l'on peut transporter dans le couloir ?

Exercice 4 — Une bijection (Fonction de Lambert)

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et justifier que f est dérivable sur ce domaine.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau des variations de f . On fera notamment figurer $f(-1)$ dans le tableau.
4. Tracer l'allure du graphe de f .
5. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}, +\infty[$.

Dans la suite, en notant $g : \begin{pmatrix} [-1, +\infty[& \longrightarrow & [-\frac{1}{e}, +\infty[\\ x & \longmapsto & xe^x \end{pmatrix}$, on posera $W = g^{-1}$ l'application réciproque de g .

6. Que vaut $g(1)$? En déduire que $W(e) = 1$. Calculer également $W(0)$ et $W(-\frac{1}{e})$.

7. Dresser le tableau des variations de W sur son domaine de définition.
8. Justifier que W est positive sur $[0, +\infty[$.
9. Montrer que W est dérivable sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$ et que pour tout $x \in] -\frac{1}{e}, +\infty[\setminus \{0\}$:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

Indication : on pourra utiliser, en le justifiant, que $\forall x \in] -\frac{1}{e}, +\infty[$, $g(W(x)) = x$.

10. Montrer que pour tout $x \in [e, +\infty[$, on a $W(x) \leq \ln(x)$.
11. Montrer que pour tout $x \in [e, +\infty[$:

$$\ln(x) - \ln(\ln(x)) \leq W(x)$$

Conseil : ne pas se lancer directement dans une étude de fonction.

12. Déterminer la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$.

Indication : un changement de variable permet de se ramener à une limite connue.

13. Dédire des questions précédentes que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W(x)}{\ln(x)} = 1$.
14. Soit $\varphi : x \mapsto \ln(x) + x$. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa réciproque à l'aide de la fonction W .