

Série ECG 2 - CORRIGE : vrai DS n°0001

Mathématiques approfondies — 3 Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

CB0 : Séries, Probabilités discrètes & Étude de fonctions (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Étude de suites et comparaison série-intégrale

1. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in [k, k+1]$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

Par croissance de l'intégrale sur l'intervalle $[k, k+1]$ de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \implies \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

- (b) Par calcul direct d'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

2. (a) Calcul direct des premiers termes de u_n :

- $u_1 = 1 - \ln(1) = 1$.
- $u_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) = \frac{3}{2} - \ln(2)$.
- $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln(3) = \frac{11}{6} - \ln(3)$.
- $u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ln(4) = \frac{25}{12} - \ln(4)$.

- (b) Algorithme en Python permettant de calculer u_n :

```
import math
def u(n):
    somme = 0
    for k in range(1, n + 1):
        somme += 1 / k
    return somme - math.log(n)
```

- (c) Exprimons la différence $v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = \ln(n) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, par continuité de la fonction logarithme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

- (d) Étudions la monotonie des deux suites :

- **Pour** (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

D'après la question 1.(a) au rang $k = n$, on a $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

- **Pour** (v_n) : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx$.

D'après la question 1.(a) au rang $k = n+1$, on a $\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

La suite (v_n) est donc croissante.

- (a) Puisque (v_n) est croissante, (u_n) décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$ (car $v_n - u_n = \ln(n/(n+1)) < 0$), on en déduit :

$$\mathbf{v_1} \leq \mathbf{v_n} \leq \mathbf{u_n} \leq \mathbf{u_1}$$

- (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_1 , elle converge donc vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

La suite (v_n) est croissante et majorée par u_1 , elle converge vers une limite $l' \in \mathbb{R}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, on a $l = l'$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite γ (constante d'Euler).

- (a) Par définition, $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n + \ln(n)$.

D'après la question précédente, $0 \leq u_n \leq u_1 = 1$ pour tout $n \geq 1$. En ajoutant $\ln(n)$:

$$\ln(\mathbf{n}) \leq \mathbf{w_n} \leq \mathbf{1} + \ln(\mathbf{n})$$

- (b) Pour tout $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$. Divisons l'encadrement par $\ln(n)$:

$$1 \leq \frac{w_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Par le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$, on conclut :

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{w_n}}{\ln(\mathbf{n})} = \mathbf{1}$$

- (c) $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} > 0$. **La suite (w_n) est donc strictement croissante.**

- (d) Puisque $w_n \geq \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, par comparaison :

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow +\infty} \mathbf{w_n} = +\infty$$

Exercice 2 — Probabilités conditionnelles & Loi binomiale

Partie A

1. L'expérience consiste en la répétition de 5 tirages indépendants et identiques ayant deux issues possibles : « obtenir pile » (succès avec la probabilité p) ou « obtenir face » (échec avec la probabilité $1-p$).

X compte le nombre de succès. X **suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(5, p)$.**

2. $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 = (1-p)^5$.
3. $P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$.
4. Par passage à l'événement contraire :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^5$$

Partie B

- Soient C_1, C_2, C_3 les événements correspondant au choix respectif de la 1ère (équilibrée, $p_1 = 1/2$), 2ème ($p_2 = 1/3$) et 3ème pièce ($p_3 = p$).
Le choix étant équiprobable : $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$.
Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (C_1, C_2, C_3) :

$$P(\text{Face}) = \sum_{i=1}^3 P(C_i)P(\text{Face} | C_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + p \right) = \frac{5 + 6p}{18}$$

De même, $P(\text{Pile}) = 1 - P(\text{Face}) = \frac{13 - 6p}{18}$.

- On lance n fois la **même** pièce choisie au départ.
Toujours par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P(n \text{ Face})} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{3} \right)^n + p^n \right], \quad \mathbf{P(n \text{ Pile})} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n + (1 - p)^n \right]$$

- (a) Pour deux lancers avec changement de pièce : il y a $3 \times 2 = 6$ couples de pièces possibles, chacun choisi avec la probabilité $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
Notons $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = p$ les probabilités d'obtenir face.

$$P(2 \text{ Face}) = \frac{1}{6} \sum_{i \neq j} p_i p_j = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{p}{2} + \frac{1}{6} + \frac{p}{3} + \frac{p}{2} + \frac{p}{3} \right) = \frac{1 + 5p}{18}$$

De même pour 2 Pile en remplaçant p_i par $q_i = 1 - p_i$ ($q_1 = 1/2$, $q_2 = 2/3$, $q_3 = 1 - p$) :

$$P(2 \text{ Pile}) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{6} + \frac{1-p}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1-p}{3} + \frac{1-p}{2} + \frac{1-p}{3} \right) = \frac{9 - 7p}{18}$$

Enfin, pour un pile et un face :

$$P(1 \text{ Pile}, 1 \text{ Face}) = 1 - P(2 \text{ Face}) - P(2 \text{ Pile}) = 1 - \frac{10 - 2p}{18} = \frac{4 + p}{9}$$

- (b) Pour trois lancers, il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ triplets de pièces possibles, chacun de probabilité $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.
En effectuant la somme des 12 produits de probabilités associés :

$$P(3 \text{ Face}) = \frac{5 + 47p + 30p^2}{432}, \quad P(3 \text{ Pile}) = \frac{114 - 145p + 42p^2}{432}$$

Exercice 3 — Modélisation d'une chaîne de recrutement

- (a) D'après l'énoncé, $P(D) = 0,40$ et $P_D(E_1) = 0,70$.
 $P(E_1) = P(D \cap E_1) = P(D) \times P_D(E_1) = 0,40 \times 0,70 = \mathbf{0,28}$.
(b) Le candidat est recruté si les événements D, E_1, E_2 sont tous réalisés.
 $P(E_2) = P(D \cap E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) = 0,28 \times 0,25 = 0,07$.
La probabilité que le candidat ne soit pas recruté est donc $P(\overline{E_2}) = 1 - 0,07 = \mathbf{0,93}$.
- (a) L'expérience consiste à observer 5 candidatures indépendantes avec une probabilité constante de succès $p = 0,07$.
 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,07)$.
(b) $P(X = 2) = \binom{5}{2} (0,07)^2 (0,93)^3 = 10 \times 0,0049 \times 0,804357 \approx \mathbf{0,0394}$.

3. Soit n le nombre de dossiers traités. Notons $Y \sim \mathcal{B}(n; 0,07)$ le nombre de candidats recrutés. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(Y \geq 1) > 0,999$:

$$P(Y \geq 1) > 0,999 \iff 1 - P(Y = 0) > 0,999 \iff 1 - (0,93)^n > 0,999 \iff (0,93)^n < 0,001$$

Par stricte croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$n \ln(0,93) < \ln(0,001) \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \quad (\text{car } \ln(0,93) < 0)$$

Application numérique : $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \approx \frac{-6,90775}{-0,07257} \approx 95,18$.

Le cabinet doit traiter au minimum 96 dossiers.

Problème — Étude d'une fonction logarithmique & développements

Partie A — Étude de la fonction f

- Par équivalent usuel au voisinage de 0, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$.
On prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$.
- (a) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\mathbf{A(x)}}{\mathbf{x^2}}$$

- (b) Étudions le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}$$

Grâce au développement fourni $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h)$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h) - h}{h^2} = -\frac{1}{2} + \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

- (c) En utilisant le développement limité de $\frac{x}{1+x} = x(1-x+o(x)) = x - x^2 + o(x^2)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$:

$$A(x) = x - x^2 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

D'où $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

- (d) Équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \implies \mathbf{y = -\frac{1}{2}x + 1}$$

(e) Pour tout $x \geq 0$, $A'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1 - (1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{1} + \mathbf{x})^2} \leq \mathbf{0}$.

A est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $A(0) = 0$, on a $A(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Par conséquent, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} \leq 0$ pour tout $x > 0$.

f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

(f) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. (a) En dérivant le quotient $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{A'(x)x^2 - A(x)(2x)}{x^4} = \frac{x A'(x) - 2A(x)}{x^3}$$

Or $x A'(x) - 2A(x) = x \left(-\frac{x}{(1+x)^2} \right) - 2 \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) = \frac{-x^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) = \mathbf{B}(\mathbf{x})$.

On a bien $f''(x) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^3}$.

(b) Dérivons $B(x)$ sur $[0, +\infty[$:

$$B'(x) = \frac{(-6x-2)(1+x)^2 - (-3x^2-2x)2(1+x)}{(1+x)^4} + \frac{2}{1+x} = \frac{2x^2}{(1+x)^3} \geq 0$$

B est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $B(0) = 0$, $B(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Ainsi $f''(x) \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

4. L'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ présente un point de départ en $(0, 1)$ avec une pente de $-\frac{1}{2}$, une décroissance convexe s'approchant de l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

Partie B — Limite de sommes

1. Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$:

$$S_N(t) = \sum_{k=0}^N (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$$

On en déduit bien : $\frac{1}{1+t} = S_N(t) + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$.

2. Intégrons l'égalité précédente pour t allant de 0 à x (avec $x \in [0, 1]$) :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x S_N(t) dt + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} dt$$

D'une part, $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x)$.

D'autre part, par linéarité : $\int_0^x S_N(t) dt = \sum_{k=0}^N (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = T_N(x)$.

On obtient bien : $\ln(1+x) = T_N(x) + J_N(x)$.

3. (a) Pour tout $t \in [0, x] \subset [0, 1]$, $1+t \geq 1 \implies \frac{t^{N+1}}{1+t} \leq t^{N+1}$. Par croissance de l'intégration :

$$|J_N(x)| = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{N+1} dt = \left[\frac{t^{N+2}}{N+2} \right]_0^x = \frac{\mathbf{x}^{N+2}}{N+2}$$

(b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $x^{N+2} \leq 1$. Ainsi $0 \leq |J_N(x)| \leq \frac{1}{N+2}$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+2} = 0 \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{J}_N(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

4. Puisque $T_N(x) = \ln(1+x) - J_N(x)$, par passage à la limite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{T}_N(\mathbf{x}) = \ln(\mathbf{1} + \mathbf{x})$$

5. (a) • Pour $x \in]0, 1]$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{T_N(x) + J_N(x)}{x} = U_N(x) + \frac{J_N(x)}{x}$.

D'où : $|f(x) - U_N(x)| = \frac{|J_N(x)|}{x} \leq \frac{x^{N+2}}{x(N+2)} = \frac{x^{N+1}}{N+2}$.

• Pour garantir une précision à ϵ près pour tout $x \in]0, 1]$, il suffit de choisir N tel que $\frac{1}{N+2} \leq \epsilon \iff N \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$.

(b) En évaluant $U_{N-1}(1)$: $U_{N-1}(1) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{j} = T_{N-1}(1)$.

Considérons la somme des carrés $V_N = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Par intégration terme à terme de l'encadrement de la question précédente, la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge bien vers $\int_0^1 f(x) dx$.