

Série ECG 2 - vrai DS n°0001

Mathématiques approfondies — 3 Septembre 2026, Quelquepart.

CB0 : Séries, Probabilités discrètes & Étude de fonctions (4h)

Profil : [Classique ECG]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★○

Exercice 1 — Étude de suites et comparaison série-intégrale

1. Soit k un entier naturel non nul.

(a) Montrer à l'aide de la monotonie de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

(b) Calculer $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$.

2. Soient u et v les suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

(a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

(b) Écrire un algorithme en langage naturel ou en Python qui affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n .

(c) Déterminer la limite de $v_n - u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) À l'aide de la question 1, étudier la monotonie des suites u et v .

3. (a) Prouver que pour tout entier naturel n non nul : $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$.

(b) Prouver que u et v convergent vers la même limite.

4. Soit w la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $w_n = u_n + \ln(n)$.

(a) Prouver que pour tout entier naturel n non nul : $\ln(n) \leq w_n \leq 1 + \ln(n)$.

(b) En déduire la limite de $\frac{w_n}{\ln(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) Étudier la monotonie de la suite w .

(d) Prouver enfin que w diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 — Probabilités conditionnelles & Loi binomiale

Partie A

On lance 5 fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0, 1[$ de donner face. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

- Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- Donner la probabilité qu'aucun lancer ne donne pile.
- Donner la probabilité qu'exactly deux lancers donnent pile.
- Donner la probabilité qu'au moins un lancer donne pile.

Partie B

On dispose de trois pièces : une pièce équilibrée, une pièce donnant face avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et une pièce donnant face avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On choisit au hasard une des trois pièces, qu'on lance ensuite.

1. On effectue un lancer de la pièce choisie. Quelle est la probabilité qu'on obtienne face ? Qu'on obtienne pile ?
2. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois la pièce choisie. Quelle est la probabilité qu'on obtienne n face ? n pile ?
3. Après chaque lancer, on repose la pièce lancée, et on choisit au hasard l'un des deux autres pièces pour le lancer suivant.
 - (a) Si on effectue deux lancers, quelle est la probabilité d'obtenir deux face ? Deux pile ? Un pile et un face ?
 - (b) Si on effectue trois lancers, quelle est la probabilité d'obtenir trois face ? Trois pile ?

Exercice 3 — Modélisation d'une chaîne de recrutement

Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements suivants :
 - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
 - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
 - E_2 : « Le candidat est recruté ».
 - (a) Calculer la probabilité de E_1 .
 - (b) Quelle est la probabilité que le candidat ne soit pas recruté ?
2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les uns des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
 - (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Que vaut la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés ?
3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

Problème — Étude d'une fonction logarithmique & développements

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Quelle est la limite de f quand x tend vers 0 ? On pose désormais : $f(0) = 1$.
2. On considère l'application A définie pour tout réel x positif par : $A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

- (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et montrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.

On admet qu'il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$.

- (b) Montrer que l'application $h \mapsto \frac{f(h) - f(0)}{h}$ tend vers $-\frac{1}{2}$ quand h tend vers 0. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
- (c) Déterminer la limite de f' en 0 à droite.
- (d) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
- (e) Dresser le tableau de variation de A . En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
- (f) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application B définie pour tout réel x positif par : $B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$.
- (a) Montrer que f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout réel x strictement positif : $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.
- (b) Dresser le tableau de variation de B . En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f (on fera notamment apparaître la tangente à la courbe au point d'abscisse 0).

Partie B — Limite de sommes

1. Soit N un entier naturel et t un réel de l'intervalle $[0, 1]$. Établir que :

$$\frac{1}{1+t} = S_N(t) + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$$

où $S_N(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^N t^N = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k$.

2. Soit N un entier naturel et x un réel de $[0, 1]$.

On pose : $T_N(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^N x^{N+1}}{N+1} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ et $J_N(x) = (-1)^{N+1} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt$.

À l'aide d'une intégration, déduire de la question précédente que : $\ln(1+x) = T_N(x) + J_N(x)$.

3. Soit x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

(a) Établir que pour tout entier naturel N : $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$.

(b) En déduire la limite de $J_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

4. En déduire que pour tout réel x de $[0, 1]$, la suite $(T_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(1+x)$.

5. (a) Soit N un entier naturel et x un réel de $[0, 1]$. On pose : $U_N(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots + \frac{(-1)^N x^N}{N+1} =$

$$\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1}.$$

• À l'aide de la question B.3a, établir que : $|f(x) - U_N(x)| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}$.

• En déduire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $f(x)$ à ϵ près pour $x \in]0, 1]$ où ϵ est un réel strictement positif.

(b) On pose pour tout entier naturel N non nul : $V_N = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{N-1}}{N^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Prouver que $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 f(x) dx$.