

# Série MP2I - CORRIGE : vrai DS n°0001

Mathématiques — 19 Septembre 2026, Quelquepart. Corrigé par Maths-Ingé

Inversion de Pascal, Sommes et Nombres de Stirling (2h30)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

## Exercice 1 — Questions diverses et indépendantes

### Q1) Deux réels de somme $-10$ et de produit $15$ :

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $x$  et  $y$  vérifient  $x + y = -10$  et  $xy = 15$  si et seulement s'ils sont les racines du polynôme  $P(t) = t^2 + 10t + 15$ .

Le discriminant classique est :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 15 = 100 - 60 = 40 > 0$$

Les racines sont donc :

$$t_1 = \frac{-10 - \sqrt{40}}{2} = \frac{-10 - 2\sqrt{10}}{2} = -5 - \sqrt{10}, \quad t_2 = \frac{-10 + \sqrt{40}}{2} = -5 + \sqrt{10}$$

Les deux réels sont donc  $-5 - \sqrt{10}$  et  $-5 + \sqrt{10}$ .

### Q2) Inégalité $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$ :

Posons  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour tout  $x \geq 0$  :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Comme  $f(0) = \ln(1) - 0 + 0 = 0$ , on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) \geq f(0) = 0$ , soit

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

### Q3) Résolution de $e^x - e^{-x} = 13$ :

En multipliant par  $e^x > 0$ , l'équation équivaut à  $(e^x)^2 - 13e^x - 1 = 0$ .

Posons  $X = e^x > 0$ . L'équation devient  $X^2 - 13X - 1 = 0$ .

Discriminant :  $\Delta = 13^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 169 + 4 = 173 > 0$ .

Les racines sont  $X_1 = \frac{13 - \sqrt{173}}{2}$  et  $X_2 = \frac{13 + \sqrt{173}}{2}$ .

Comme  $173 > 169 = 13^2$ ,  $\sqrt{173} > 13$ , donc  $X_1 < 0$  (à rejeter car  $X = e^x > 0$ ).

On a donc  $e^x = \frac{13 + \sqrt{173}}{2} \iff x = \ln\left(\frac{13 + \sqrt{173}}{2}\right)$ .

### Q4) Calcul et simplification de $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^{3-2k}}{(-3)^{-k}}$ :

Simplifions le terme général :

$$\frac{2^{3-2k}}{(-3)^{-k}} = 2^3 \cdot (2^{-2})^k \cdot (-3)^k = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot (-3)^k = 8 \left(-\frac{3}{4}\right)^k$$

On reconnaît une somme géométrique de raison  $q = -\frac{3}{4} \neq 1$  :

$$B_n = 8 \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{4}\right)^k = 8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -6 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{7}{4}} = -\frac{24}{7} \left(1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

**Conclusion :**  $B_n = -\frac{24}{7} \left(1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)$ , sous la forme attendue avec  $a = -\frac{24}{7}$  et  $b = -\frac{3}{4}$ .

**Q5) Négation formelle :**

La négation de «  $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, x^4 = y^2 + z^6 \implies x = 0$  » s'écrit :

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{Z}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}, \quad (\mathbf{x}^4 = \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^6) \quad \text{et} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

**Q6) Valeur de la somme géométrique :**

$$\sum_{k=a}^b q^k = \begin{cases} b-a+1 & \text{si } q = 1 \\ q^a \frac{1-q^{b-a+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

**Q7) Démonstration :**

- Si  $q = 1$ ,  $\sum_{k=a}^b 1^k = \sum_{k=a}^b 1 = b - a + 1$ .
- Si  $q \neq 1$ , posons  $S = \sum_{k=a}^b q^k$ . Par télescopage :

$$(1-q)S = \sum_{k=a}^b q^k - \sum_{k=a}^b q^{k+1} = \sum_{k=a}^b q^k - \sum_{j=a+1}^{b+1} q^j = q^a - q^{b+1} = q^a(1 - q^{b-a+1})$$

Comme  $1 - q \neq 0$ , en divisant par  $1 - q$ , on obtient  $S = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}$ .

**Exercice 2 — Autour de la formule d'inversion de Pascal****Partie I — Premiers exemples**

**Q1)** Si  $a_k = 1$  pour tout  $k$ , par la formule du binôme de Newton :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

**Q2)** Si  $a_k = x^k$  pour tout  $k$ , toujours par le binôme de Newton :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} = (\mathbf{x} + \mathbf{1})^{\mathbf{n}}$$

**Partie II — Cas de la suite des entiers**

**Q1)** Par la formule du triangle de Pascal  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$  (valable pour  $1 \leq k \leq n$ ) :

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} k = \sum_{k=1}^{n+1} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} k$$

La première somme vaut  $A_n$  (le terme  $k = 0$  est nul), d'où :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}+1} = \mathbf{A}_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}+1} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}-1} \mathbf{k}$$

**Q2)** Effectuons le changement d'indice  $j = k - 1$  dans la seconde somme :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (j+1) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = A_n + 2^n$$

On en déduit immédiatement :  $A_{n+1} = A_n + A_n + 2^n = 2A_n + 2^n$ .

**Q3)** Établissons par récurrence la propriété  $\mathcal{P}(n) : A_n = n2^{n-1}$ .

• **Initialisation** ( $n = 0$ ) :  $A_0 = \binom{0}{0} \times 0 = 0$  et  $0 \times 2^{-1} = 0$ .  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie ( $A_n = n2^{n-1}$ ).

D'après Q11 :  $A_{n+1} = 2(n2^{n-1}) + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n$ .  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

**Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = n2^{n-1}$ .

### Partie III — Formule d'inversion de Pascal

**Q1)** Soient  $j \leq k \leq n$ . Exprimons les factorielles :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!}$$

D'autre part :

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!}$$

Les deux membres sont bien égaux.

**Q2)** Si l'encadrement  $j \leq k \leq n$  n'est pas vérifié (par exemple si  $k < j$  ou  $k > n$ ), au moins un des coefficients binomiaux est nul par convention, donc l'égalité devient simplement  $0 = 0$ , elle reste vraie.

**Q3)** En utilisant l'identité de Q13 :

$$S = \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{j} \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n-j}{k-j}$$

Posons le changement d'indice  $l = k - j$ . Quand  $k$  varie de  $j$  à  $n$ ,  $l$  varie de 0 à  $n - j$ .

Remarquons que  $n - k = (n - j) - l$ . On obtient :

$$S = \binom{n}{j} \sum_{l=0}^{n-j} (-1)^{(n-j)-l} \binom{n-j}{l} = \binom{n}{j} (1-1)^{n-j} = \binom{n}{j} 0^{n-j}$$

• Si  $n = j$  :  $S = \binom{n}{n} 0^0 = 1 \times 1 = 1$ .

• Si  $n > j$  :  $n - j > 0$ , donc  $0^{n-j} = 0$ , d'où  $S = 0$ .

On retrouve exactement le symbole de Kronecker :  $\sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \delta_{n,j}$ .

**Q4)** Remplaçons  $A_k$  par son expression dans le membre de droite :

$$R_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j \right)$$

Par interversion des sommes (domaine de sommation :  $0 \leq j \leq k \leq n$ ) :

$$R_n = \sum_{j=0}^n a_j \left( \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} \right) \stackrel{(Q15)}{=} \sum_{j=0}^n a_j \delta_{n,j} = a_n$$

D'où la formule d'inversion de Pascal :  $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_k$ .

## Partie IV — Nombre de surjections

**Q1) Tableau des valeurs de  $\sigma(n, p)$  pour  $0 \leq n, p \leq 4$  :**

Règles de remplissage :  $\sigma(n, 0) = 0$  pour  $n \geq 1$ ,  $\sigma(n, p) = 0$  pour  $n < p$ ,  $\sigma(0, 0) = 1$  et la relation de récurrence  $\sigma(n+1, p+1) = (p+1)(\sigma(n, p+1) + \sigma(n, p))$ .

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  |
|------------------|---|---|----|----|----|
| 0                | 1 | 0 | 0  | 0  | 0  |
| 1                | 0 | 1 | 0  | 0  | 0  |
| 2                | 0 | 1 | 2  | 0  | 0  |
| 3                | 0 | 1 | 6  | 6  | 0  |
| 4                | 0 | 1 | 14 | 36 | 24 |

**Q2) Démontrons par récurrence que  $\sigma(p, p) = p!$  :**

• **Initialisation** ( $p = 0$ ) :  $\sigma(0, 0) = 1 = 0!$ .

• **Hérédité** : Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\sigma(p, p) = p!$ .

La relation (iv) donne :  $\sigma(p+1, p+1) = (p+1)(\sigma(p, p+1) + \sigma(p, p))$ .

D'après (iii),  $\sigma(p, p+1) = 0$  car  $p < p+1$ .

Donc  $\sigma(p+1, p+1) = (p+1)(0 + p!) = (p+1)!$ .

**Conclusion** : Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma(p, p) = p!$ .

**Q3) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Démontrons par récurrence sur  $n$  la propriété  $\mathcal{Q}(n) : p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sigma(n, k)$ .**

• **Initialisation** ( $n = 0$ ) :  $p^0 = 1$ .

Membre de droite :  $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sigma(0, k) = \binom{p}{0} \sigma(0, 0) + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \times 0 = 1 \times 1 = 1$ .  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{Q}(n)$  vraie.

En utilisant la relation du capitaine  $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$ , on remarque que :

$$p \binom{p}{k} = k \binom{p}{k} + (p-k) \binom{p}{k} = k \binom{p}{k} + (k+1) \binom{p}{k+1}$$

Multiplions l'hypothèse de récurrence par  $p$  :

$$p^{n+1} = \sum_{k=0}^p p \binom{p}{k} \sigma(n, k) = \sum_{k=0}^p k \binom{p}{k} \sigma(n, k) + \sum_{k=0}^p (k+1) \binom{p}{k+1} \sigma(n, k)$$

Dans la seconde somme, effectuons le changement d'indice  $j = k+1$  :

$$\sum_{k=0}^{p-1} j \binom{p}{j} \sigma(n, j-1) = \sum_{j=1}^p j \binom{p}{j} \sigma(n, j-1)$$

En regroupant les deux sommes :

$$p^{n+1} = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \underbrace{k(\sigma(n, k) + \sigma(n, k-1))}_{=\sigma(n+1, k) \text{ par (iv)}} = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \sigma(n+1, k)$$

Comme  $\sigma(n+1, 0) = 0$ , on a bien  $p^{n+1} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sigma(n+1, k)$ .  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie.

**Q4) Cas  $p = 0$  :**

Pour  $p = 0$ , le terme de gauche vaut  $0^n$  (1 si  $n = 0$ , 0 si  $n > 0$ ).

Le terme de droite vaut  $\binom{0}{0} \sigma(n, 0) = \sigma(n, 0)$  (1 si  $n = 0$ , 0 si  $n > 0$ ).

L'égalité **reste donc vraie** pour  $p = 0$ .

**Q5)** Posez  $A_p = p^n$  et  $a_k = \sigma(n, k)$ . D'après Q19,  $A_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k$ .

Par application directe de la formule d'inversion de Pascal (Q16), on obtient :

$$\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{p}} (-1)^{\mathbf{p}-\mathbf{k}} \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{k}} \mathbf{k}^{\mathbf{n}}$$