

Série MP2I - vrai DS n°0001

Mathématiques — 19 Septembre 2026, Lycée Henri Poincaré.

Inversion de Pascal, Sommes et Nombres de Stirling (2h30)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★★

Exercice 1 — Questions diverses et indépendantes

Q1) Déterminer deux réels dont la somme vaut -10 et le produit vaut 15 .

Q2) À l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

Q3) Résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 13$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer et simplifier $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^{3-2k}}{(-3)^{-k}}$.

Vous présenterez le résultat sous la forme $a(1-b^n)$, où a et b sont des nombres rationnels écrits sous forme irréductible.

Q5) Écrire la négation de l'assertion « $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, x^4 = y^2 + z^6 \implies x = 0$ ».

Q6) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$ et $q \in \mathbb{R}$. Rappeler, selon la valeur de q , la valeur de $\sum_{k=a}^b q^k$.

Q7) Démontrer la formule de la question précédente.

Exercice 2 — Autour de la formule d'inversion de Pascal

On rappelle que $0^0 = 1$.

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, on note $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

Partie I — Premiers exemples

Q1) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1$. Justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 2^n$.

Q2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = x^k$. Calculer A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II — Cas de la suite des entiers

Dans cette partie uniquement, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. On souhaite donc calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$$

Q1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_{n+1} = A_n + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} k$$

Q2) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 2A_n + 2^n$.

Q3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n2^{n-1}$.

Partie III — Formule d'inversion de Pascal

Dans cette partie, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite quelconque de réels, et on pose $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q1) Soient j, k, n des entiers naturels vérifiant $j \leq k \leq n$. Établir l'identité :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$$

Q2) Que dire de l'égalité précédente si l'encadrement $j \leq k \leq n$ n'est pas satisfait ?

Q3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. À l'aide de la relation précédente, démontrer que :

$$\sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \delta_{n,j}, \quad \text{où } \delta_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q4) En déduire la formule d'inversion de Pascal : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_k$$

Partie IV — Nombre de surjections

Dans cette partie, on étudie les coefficients $\sigma(n, p)$ définis pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ par les quatre assertions suivantes :

- (i) $\sigma(0, 0) = 1$;
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma(n, 0) = 0$;
- (iii) $\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \implies \sigma(n, p) = 0$;
- (iv) $\forall n, p \in \mathbb{N}, \sigma(n+1, p+1) = (p+1) \times (\sigma(n, p+1) + \sigma(n, p))$.

Q1) Calculer $\sigma(n, p)$ pour tous $n, p \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. On inscrira les résultats dans un tableau où le nombre $\sigma(n, p)$ sera localisé à la ligne n et à la colonne p .

Q2) Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sigma(p, p) = p!$.

Q3) Pour la question suivante, on pourra utiliser, sans la démontrer, la formule du capitaine :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sigma(n, k)$$

Q4) Cette égalité reste-t-elle vraie si $p = 0$?

Q5) En utilisant le résultat de la question **Q16)**, donner alors l'expression de $\sigma(n, p)$ en fonction de n et p . Cette expression fera intervenir un symbole $\sum$.