

Série MPSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0001

Mathématiques — Septembre 2026 . Correcteur : Maths Ingé

Maîtrise des symboles, Récurrences et Raisonnements fondamentaux (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1

- 1) Supposons $E \subset F$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

Par définition de l'ensemble des parties, $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Par transitivité de la relation d'inclusion :

$$\left. \begin{array}{l} A \subset E \\ E \subset F \end{array} \right\} \implies A \subset F$$

Ainsi, $A \in \mathcal{P}(F)$. On a donc bien démontré que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

- 2) Montrons l'égalité par double inclusion :

- **Inclusion ($\subset$)** : Soit $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$, c'est-à-dire $A \subset E \cap F$.

Comme $E \cap F \subset E$, par transitivité $A \subset E$, donc $A \in \mathcal{P}(E)$.

Comme $E \cap F \subset F$, par transitivité $A \subset F$, donc $A \in \mathcal{P}(F)$.

On en déduit que $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$, d'où $\mathcal{P}(E \cap F) \subset \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

- **Inclusion ($\supset$)** : Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

Alors $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{P}(F)$, soit $A \subset E$ et $A \subset F$.

Par définition de l'intersection, $A \subset E \cap F$, ce qui signifie que $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$.

D'où $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cap F)$.

Par double inclusion, on conclut : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

- 3) **L'égalité n'est pas vraie en général.** Étudions séparément chaque inclusion :

- **Inclusion $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$ (Toujours vraie) :**

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Alors $A \subset E$ ou $A \subset F$.

◦ Si $A \subset E$, comme $E \subset E \cup F$, on a $A \subset E \cup F$.

◦ Si $A \subset F$, comme $F \subset E \cup F$, on a $A \subset E \cup F$.

Dans les deux cas, $A \subset E \cup F \implies A \in \mathcal{P}(E \cup F)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

- **Inclusion réciproque $\mathcal{P}(E \cup F) \subset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ (Fausse en général) :**

Exhibons un contre-exemple. Posons $E = \{1\}$ et $F = \{2\}$. On a $E \cup F = \{1, 2\}$.

◦ D'une part, $E \cup F = \{1, 2\} \in \mathcal{P}(E \cup F)$.

◦ D'autre part, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$ et $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{2\}\}$, donc $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

Puisque $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, l'inclusion réciproque est fausse.

Conclusion : En général, $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Exercice 2

- 1) Calculs en 0 :

$$\text{ch}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1, \quad \text{sh}(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par combinaison linéaire, ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{sh } x$$

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2}$.

Comme $e^{-x} > 0$, $\operatorname{sh} x$ est strictement négatif sur $] -\infty, 0[$, nul en 0, et strictement positif sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent, ch est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle atteint son minimum absolu en 0, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq \operatorname{ch}(0) = 1$.

- 3) Soit $y \in \mathbb{R}$.

- $\sqrt{y^2 - 1}$ est définie $\iff y^2 - 1 \geq 0 \iff y \in] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- Si $y \geq 1$: $\sqrt{y^2 - 1} \geq 0$, donc $y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 > 0$. De plus, $y > \sqrt{y^2 - 1} \iff y^2 > y^2 - 1 \iff 0 > -1$ (toujours vrai), donc $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$.
- Si $y \leq -1$: $\sqrt{y^2 - 1} < \sqrt{y^2} = |y| = -y$, donc $y + \sqrt{y^2 - 1} < y - y = 0$.

L'ensemble recherché est donc $[1, +\infty[$.

- 4) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.

- Si $y < 1$: comme $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation n'admet aucune solution.

- Si $y \geq 1$: $\operatorname{ch} x = y \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$.

En posant $X = e^x > 0$, l'équation devient $X^2 - 2yX + 1 = 0$.

Le discriminant réduit vaut $\Delta' = y^2 - 1 \geq 0$. Les deux racines sont :

$$X_1 = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

D'après la question 3, $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$. De plus, $X_1 X_2 = 1 \implies X_1 = \frac{1}{X_2}$.

En repassant à $x = \ln X$, l'ensemble des solutions est :

$$\mathbf{S} = \left\{ \pm \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) \right\}$$

- 5) • **Unicité (Analyse)** : Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $g(0) = g'(0) = 0$ tels que $f(x) = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + g(x)$.

◦ En $x = 0$: $f(0) = a \operatorname{ch}(0) + b \operatorname{sh}(0) + g(0) = a \cdot 1 + b \cdot 0 + 0 = a \implies \mathbf{a} = \mathbf{f}(0)$.

◦ En dérivant : $f'(x) = a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x + g'(x)$.

◦ En $x = 0$: $f'(0) = a \operatorname{sh}(0) + b \operatorname{ch}(0) + g'(0) = b \cdot 1 + 0 = b \implies \mathbf{b} = \mathbf{f}'(0)$.

Ainsi, $g(x) = f(x) - f(0) \operatorname{ch} x - f'(0) \operatorname{sh} x$ est uniquement déterminée.

- **Existence (Synthèse)** : Posons $a = f(0)$, $b = f'(0)$ et $g(x) = f(x) - f(0) \operatorname{ch} x - f'(0) \operatorname{sh} x$.

◦ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

◦ $g(0) = f(0) - f(0) \cdot 1 - f'(0) \cdot 0 = 0$.

◦ $g'(0) = f'(0) - f(0) \cdot 0 - f'(0) \cdot 1 = 0$.

La décomposition existe et est unique.

Exercice 3

- 1) Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- **Cas** $x \geq 0$ ($x \neq 1$) : $|x| = x$. L'inéquation s'écrit $\frac{1+x}{1-x} \leq 1 - x \iff \frac{1+x-(1-x)^2}{1-x} \leq 0 \iff \frac{x(3-x)}{1-x} \leq 0$.

L'étude du signe du quotient sur $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ donne les solutions : $\{0\} \cup]1, 3]$.

- **Cas** $x < 0$: $|x| = -x$. L'inéquation s'écrit $\frac{1+x}{1-x} \leq 1 + x \iff (1+x) \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) \leq 0 \iff \frac{x(1+x)}{1-x} \leq 0$.

Comme $x < 0$, $1 - x > 1 > 0$. Le quotient est du signe de $x(1+x)$. Comme $x < 0$, $x(1+x) \leq 0 \iff 1+x \geq 0 \iff x \geq -1$.

Les solutions sur $] -\infty, 0[$ sont $[-1, 0[$.

Conclusion : $S = [-1, 0] \cup [1, 3]$.

- 2) • $\sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^i j = \left(\sum_{i=1}^n 2^i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \left(2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \mathbf{n(n+1)(2^n - 1)}$.
- $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j(j+1)} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i^2 \right) = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j(j+1)} \frac{(j-1)j(2j-1)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{j=2}^n \frac{2j^2 - 3j + 1}{j+1}$.
- Puisque $\frac{2j^2 - 3j + 1}{j+1} = 2j - 5 + \frac{6}{j+1}$, la somme se simplifie en :

$$\frac{1}{6} \left(2 \sum_{j=2}^n j - 5 \sum_{j=2}^n 1 + 6 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j+1} \right) = \frac{(\mathbf{n} - 1)(\mathbf{n} - 3)}{6} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}$$

• $\prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i^2}{j+1} = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \frac{i^2}{j+1} \right) = \prod_{i=1}^n \frac{i^{2n}}{(n+1)!} = \frac{(n!)^{2n}}{((n+1)!)^n} = \left(\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n+1}} \right)^n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(2^k \frac{k+1}{k+3} \right) = \left(2^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \right) \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+3)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = n! \text{ et } \prod_{k=0}^{n-1} (k+3) = \frac{(n+2)!}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (valable également pour $n = 0$) :

$$\mathbf{u_n} = \frac{2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}}}{(\mathbf{n+1})(\mathbf{n+2})}$$

4) a) Utilisons la quantité conjuguée :

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2((n+1) - n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Puisque $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, on a $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$, d'où $\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Ainsi $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \implies 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : 2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$$

• **Initialisation** ($n = 1$) : $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k}} = 1$. $2\sqrt{1} = 2$ et $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,828$. On a bien $2\sqrt{2} - 2 \leq 1 \leq 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité** : Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. En ajoutant $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

D'après la question 4a, $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$ (majoration).

Pour la minoration, montrons que $2\sqrt{n+2} - 2 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \iff 2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

En effet, $2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc démontrée.

Par principe de récurrence, l'encadrement est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Limite : En divisant par $\sqrt{n} > 0$:

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 2$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$$

Exercice 4 — Autour des coefficients binomiaux

Partie I. Calcul d'une somme

- 1) **Méthode 1 (sans récurrence) :** Utilisons la somme télescopique de l'identité $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

En sommant pour k allant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^n \left((k+1)^4 - k^4 \right) = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

Le membre de gauche vaut $(n+1)^4 - 0 = (n+1)^4$. En utilisant les formules connues :

$$(n+1)^4 = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$4 \sum_{k=0}^n k^3 = (n+1) \left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right] = (n+1) (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1)$$

$$4 \sum_{k=0}^n k^3 = (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2 \implies \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- 2) **Méthode 2 :**

a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $l \in [0; k]$:

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{l+1} - \binom{k}{l+1} &= \frac{(k+1)!}{(l+1)!(k-l)!} - \frac{k!}{(l+1)!(k-l-1)!} = \frac{k!}{(l+1)!(k-l)!} \left((k+1) - (k-l) \right) \\ &= \frac{k!}{(l+1)!(k-l)!} (l+1) = \frac{k!}{l!(k-l)!} = \binom{k}{l} \end{aligned}$$

b) Par somme télescopique :

$$\sum_{k=l}^n \binom{k}{l} = \sum_{k=l}^n \left(\binom{k+1}{l+1} - \binom{k}{l+1} \right) = \binom{n+1}{l+1} - \binom{l}{l+1} = \binom{n+1}{l+1}$$

$$c) \binom{k}{1} = k, \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}, \quad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

$$d) a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1} = \frac{a}{6} k^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right) k^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c \right) k.$$

Par identification avec le polynôme k^3 , on obtient le système :

$$\begin{cases} a/6 = 1 \implies \mathbf{a = 6} \\ b/2 - 3 = 0 \implies \mathbf{b = 6} \\ 2 - 3 + c = 0 \implies \mathbf{c = 1} \end{cases}$$

e) En utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k^3 &= 6 \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + 1 \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = 6 \binom{n+1}{4} + 6 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= 6 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 6 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{\mathbf{n}^2(\mathbf{n}+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Partie II. Formule d'inversion de Pascal

$$3) \binom{n}{k} \binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}.$$

$$4) S_{n,l} = \sum_{k=l}^n (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \sum_{k=l}^n (-1)^{k-l} \binom{n-l}{k-l} \underset{j=k-l}{=} \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^j \binom{n-l}{j} = \binom{n}{l} (1-1)^{n-l}.$$

- Si $l < n$: $n-l > 0$, donc $(1-1)^{n-l} = 0^n = 0 \implies \mathbf{S_{n,l} = 0}$.
- Si $l = n$: $\binom{n}{n} (1-1)^0 = 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$.

5) En développant le membre de droite et en intervertissant les sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a_l = \sum_{l=0}^n a_l (-1)^{n-l} \sum_{k=l}^n (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \\ &= \sum_{l=0}^n a_l (-1)^{n-l} S_{n,l} = a_n (-1)^0 S_{n,n} = \mathbf{a_n}\end{aligned}$$

6) a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation** ($n = 0$) : $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x_k = x_0 = 1 = 0!$. Vrai.
- **Hérédité** : Supposons $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x_k = x_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (k x_{k-1} + (-1)^k)$$

Comme $\binom{n+1}{k} k = (n+1) \binom{n}{k-1}$, on a :

$$= 1 + (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x_{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = 1 + (n+1)n! + ((1-1)^{n+1} - 1) = (n+1)!$$

b) D'après la question 6a, $b_k = k! = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x_l$. En appliquant la formule d'inversion de Pascal (question 5) avec $a_n = x_n$ et $b_k = k!$:

$$x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{n!}{(n-k)!} \underset{j=n-k}{=} \mathbf{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

Exercice 5

- 1) Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto c$. $f(xy) = c$ et $f(f(x) + f(y)) = f(c + c) = c$. L'égalité (E) est identiquement vérifiée.
- 2)
 - a) $f(xyz) = f((xy)z) \stackrel{(E)}{=} f(f(xy) + f(z)) \stackrel{(E)}{=} f(f(f(x) + f(y)) + f(z)) \stackrel{(E)}{=} \mathbf{f}((\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}))\mathbf{z})$.
 - b) On suppose $f(0) \neq 0$.
 - i) Posons $x = 0$ et $y = 0$ dans l'identité précédente : $\forall z \in \mathbb{R}, f(0) = f(2f(0)z)$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) \neq 0$, on peut choisir $z = \frac{a}{2f(0)} \in \mathbb{R}$. On obtient : $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{0})$.
 - ii) f est la fonction constante égale à $f(0)$.
 - c) On suppose $f(0) = 0$.
 - i) Posons $x = 0$ dans l'identité du 2a : $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, f(0) = f((0 + f(y))z) \implies \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{y})\mathbf{z}) = \mathbf{0}$.
 - ii) Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
D'après la question précédente, $f(f(x_0)z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
Lorsque z parcourt $\mathbb{R}$, $w = f(x_0)z$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier (car $f(x_0) \neq 0$).
Ceci implique $f(w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{R}$, ce qui contredit l'existence de x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$.
 - iii) Il vient nécessairement $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (fonction constante nulle).
- 3) **Conclusion** : Les solutions de (E) sont exactement toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.