

Série MPSI - vrai DS n°0001

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Maîtrise des symboles, Récurrences et Raisonnements fondamentaux (4h)

Profil : [Socle & Rentrée]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★○○

Exercice 1

Soient E et F deux ensembles.

- 1) Montrer que : $E \subset F \implies \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
- 2) Établir : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
- 3) A-t-on $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$? *Traiter chaque inclusion séparément.*

Exercice 2

On définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- 1) Calculer $\operatorname{ch}(0)$ et $\operatorname{sh}(0)$, puis montrer que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer ch' et sh' à l'aide de ch et sh .
- 2) Étudier les variations de ch sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Déterminer l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ pour lesquels à la fois $\sqrt{y^2 - 1}$ est défini, $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$ et $y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$.
- 4) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x = y$, d'inconnue x .
- 5) *Cette question est indépendante des questions 2 à 4 :*
Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme :

$$f : x \mapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + g(x)$$

où a et b sont des réels et où $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $g(0) = g'(0) = 0$.

Exercice 3

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{1+x}{1-x} \leq 1 - |x|$.
- 2) Simplifier la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^i j$, la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$ et le produit $\prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i^2}{j+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2^n(n+1)}{n+3} u_n$.
Pas de calcul avec des points de suspension.
- 4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$.

b) Montrer, par exemple par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$$

puis en déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 4 — Autour des coefficients binomiaux

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I. Calcul d'une somme

Le but de cette première partie est de démontrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\star)$$

1) **Méthode 1.** Proposer une première démonstration de l'identité $(\star)$. Une réponse avec une récurrence donnera maximum un quart des points.

2) **Méthode 2 : en utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée.**

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer, sans évoquer la formule de Pascal, que :

$$\forall l \in 0; k, \quad \binom{k}{l} = \binom{k+1}{l+1} - \binom{k}{l+1}$$

b) Soient $l, n \in \mathbb{N}$ tels que $l \leq n$. Montrer que :

$$\sum_{k=l}^n \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$$

Cette égalité s'appelle formule du triangle de Pascal généralisée.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

d) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1}$$

e) Retrouver alors $(\star)$.

Si les coefficients a , b et c n'ont pas été obtenus à la question 2)d), un calcul littéral pourra tout de même être effectué.

Partie II. Formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. À partir de celle-ci, on définit une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a_l$$

L'objectif de cette partie est de trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de $b_0, \dots, b_n$.

3) Soient $n, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $l \leq k \leq n$. Montrer que :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}$$

4) Soient $n, l \in \mathbb{N}$ tels que $l \leq n$. On pose $S_{n,l} = \sum_{k=l}^n (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l}$. Montrer que :

$$S_{n,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } l < n \\ 1 & \text{si } l = n \end{cases}$$

5) Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k$$

6) **Application.** On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = (n+1)x_n + (-1)^{n+1}$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 5

On souhaite montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(f(x) + f(y))$$

sont exactement les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

1) Vérifier que les fonctions constantes sont bien solutions de (E).

2) On se donne maintenant une fonction f qui vérifie (E).

a) Montrer que l'on a : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(xyz) = f((f(x) + f(y))z)$.

b) On suppose que $f(0) \neq 0$.

i) Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant $x = 0 = y$ et z bien choisi, montrer que $f(a) = f(0)$.

ii) Conclure dans le cas $f(0) \neq 0$.

c) On suppose que $f(0) = 0$.

i) Montrer que : $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, \quad f(f(y)z) = 0$.

ii) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$: trouver une contradiction.

iii) Conclure dans le cas $f(0) = 0$.

3) Conclure sur ce que l'on vient de démontrer.