

Série MPSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0002

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Maîtrise des symboles, Récurrences et Raisonnements fondamentaux (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 0 : De la quantification

1. **VRAI.** Pour tout $x \in [2, 4]$, $x \geq 2 \implies x^2 \geq 4 > 1$.
2. **VRAI.** Pour $x = -1 \in \mathbb{R}_-$, $(-1)^2 = 1$.
3. **VRAI.** Choisir $x = 0$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 + y = y$.
4. **VRAI.** Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $y = -x \in \mathbb{R}$, on a $x + (-x) = 0$.
5. **FAUX.** S'il existait un tel y , pour $x = 0$ on aurait $0 + y = 0 \implies y = 0$. Mais alors pour $x = 1$, $1 + 0 = 1 \neq 0$.
6. **VRAI.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, si $z > y$, alors $z > x$.
7. **VRAI.** Choisir $y = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $z = x$.
8. **FAUX.** Toute fonction réelle n'atteint pas nécessairement un minimum global sur $\mathbb{R}$ (par exemple $f(x) = x$).

Exercice 1 : Raisonnement logique

1. (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$.
(b) Négation : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \quad \text{et} \quad f(x) \leq f(y)$.
En français : « Il existe au moins deux réels x et y tels que x est strictement inférieur à y et $f(x)$ est inférieur ou égal à $f(y)$. »
2. (a) (A) : « Pour tout entier naturel, il existe un nombre premier qui lui est strictement supérieur. »
(B) : « Il existe un nombre premier strictement supérieur à tous les entiers naturels. »
(b) $\neg(A) : \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{P}, \quad p \leq n$.
 $\neg(B) : \forall p \in \mathbb{P}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad p \leq n$.
(c) (A) est **VRAIE** (Théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers).
(B) est **FAUSSE** : pour tout $p \in \mathbb{P}$, en choisissant $n = p \in \mathbb{N}$, l'inégalité $p > n$ est mise en défaut ($p \leq p$).
3. C'est l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **strictly positives à partir d'un certain rang**.
4. Négation formelle :

$$\exists r, r' \in]0, 1[, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall c_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists e \in E, \quad \exists c > c_0, \quad \neg P(r, r', m, k, c_0, c, e)$$

Exercice 2 : Soyez forts !

1. Calculs des premiers termes :
 - Pour $n = 1 = 3 \times 0 + 1 \implies q = 0, r = 1$. $u_1 = u_0 + \frac{u_0 + u_0}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.
 - Pour $n = 2 = 3 \times 0 + 2 \implies q = 0, r = 2$. $u_2 = u_1 + \frac{u_0 + u_0}{4} = \frac{5}{3} + \frac{2}{4} = \frac{13}{6}$.
 - Pour $n = 3 = 3 \times 1 + 0 \implies q = 1, r = 0$. $u_3 = u_2 + \frac{u_1 + u_2}{5} = \frac{13}{6} + \frac{23/6}{5} = \frac{44}{15}$.
 - Pour $n = 4 = 3 \times 1 + 1 \implies q = 1, r = 1$. $u_4 = u_3 + \frac{u_1 + u_2}{6} = \frac{44}{15} + \frac{23/6}{6} = \frac{643}{180}$.

2. Puisque $r \geq 0$, $n = 3q + r \geq 3q$, donc $3q \leq n$.
On en déduit : $(q + 1) + (2q + 1) = 3q + 2 \leq n + 2$.
3. Démontrons par récurrence forte que pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n) : u_n \leq n + 1$.
- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \leq 0 + 1 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.
 - **Hérédité** : Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.
La division euclidienne de n par 3 donne $n = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$.
Comme $n \geq 1$, $q \leq \frac{n}{3} \leq n - 1$ et $2q \leq \frac{2n}{3} \leq n - 1$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence forte aux rangs $n - 1$, q et $2q$:

$$u_{n-1} \leq n, \quad u_q \leq q + 1, \quad u_{2q} \leq 2q + 1$$

En réinjectant dans la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{u_q + u_{2q}}{n + 2} \leq n + \frac{(q + 1) + (2q + 1)}{n + 2} \underset{\text{d'après Q2}}{\leq} n + \frac{n + 2}{n + 2} = n + 1$$

D'où $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

Par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + 1$.

Exercice 3 : Étude d'une suite

1. Soit $v_n = u_n - n^2 \iff u_n = v_n + n^2$. En réinjectant dans la relation sur u_{n+2} :

$$v_{n+2} + (n + 2)^2 = \frac{3(n + 1)(v_{n+1} + (n + 1)^2) - 2n(v_n + n^2) - 2n + 1}{n + 2}$$

En multipliant par $n + 2$ et en regroupant les termes polynomiaux d'un côté, la simplification donne :

$$(n + 2)v_{n+2} = 3(n + 1)v_{n+1} - 2nv_n \implies \mathbf{v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n}$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r - 1)(r - 2) = 0$.

Les solutions sont de la forme $v_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta 2^n$.

Conditions initiales :

- $v_0 = u_0 - 0^2 = 5 \implies \alpha + \beta = 5$.
- $v_1 = u_1 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \implies \alpha + 2\beta = 1$.

On résout le système : $\beta = -4$ et $\alpha = 9$. Ainsi : $v_n = 9 - 2^{n+2}$.

2. On en déduit l'expression de $u_n = v_n + n^2$:

$$\mathbf{u_n = n^2 + 9 - 2^{n+2}}$$

Problème 1 : Décomposition en base b

Partie I : Encadrement d'un entier par des puissances de b

1. Base $b = 2$: $13 = 2^3 + 2^2 + 1 = \overline{1101}^2$, $27 = 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = \overline{11011}^2$.
Base $b = 5$: $13 = 2 \times 5 + 3 = \overline{23}^5$, $27 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 2 = \overline{102}^5$.
2. Puisque $b \geq 2$, on a $b - 1 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^{n+1} - b^n = b^n(b - 1) > 0$.
La suite $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc ****strictly croissante****.
3. (a) Somme des termes d'une suite géométrique de raison $b \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} b^k = \frac{b^n - 1}{b - 1}$.

(b) **Minoration** : Comme $a_n \geq 1$ et $a_i \geq 0$ pour tout i , $x = \sum_{i=0}^n a_i b^i \geq a_n b^n \geq b^n$.

Majoration : $a_i \leq b - 1$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donc :

$$x \leq (b-1) \sum_{k=0}^n b^k = (b-1) \frac{b^{n+1} - 1}{b-1} = b^{n+1} - 1 < b^{n+1}$$

D'où le double encadrement : $b^n \leq x < b^{n+1}$.

4. (a) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $(1+t)^n \geq 1+nt$ pour $t \geq 0$.

• *Initialisation* : $(1+t)^0 = 1 \geq 1+0 \cdot t$. Vrai.

• *Hérédité* : Supposons $(1+t)^n \geq 1+nt$. Comme $1+t \geq 0$:

$$(1+t)^{n+1} \geq (1+nt)(1+t) = 1 + (n+1)t + nt^2 \geq 1 + (n+1)t \quad (\text{car } nt^2 \geq 0)$$

(b) $P : \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b^n \leq M$.

(c) $Q : \forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad b^n > M$.

(d) P est **FAUSSE** et Q est **VRAIE**.

En effet, posons $t = b - 1 > 0$. Par Bernoulli, $b^n = (1+t)^n \geq 1+n(b-1)$.

Par la propriété d'Archimède, pour tout réel M , il existe un entier n tel que $1+n(b-1) > M$, d'où $b^n > M$.

5. (a) $A = \{p \in \mathbb{N} \mid b^p > N\} \subset \mathbb{N}$. D'après la question 4d, $A \neq \emptyset$.

Par le principe du bon ordre, A admet un plus petit élément $p_0 = \min A$.

Comme $N \geq 1$ et $b^0 = 1 \leq N$, $0 \notin A$, d'où $p_0 \geq 1$.

En posant $n = p_0 - 1 \in \mathbb{N}$:

• $n \notin A \implies b^n \leq N$.

• $n+1 = p_0 \in A \implies N < b^{n+1}$.

(b) Si $m \neq n$, disons $m > n$, alors $m \geq n+1 \implies b^m \geq b^{n+1} > N$, ce qui contredit $b^m \leq N$.

L'entier n est donc **unique**.

Partie II : Existence de la décomposition

6. (a) Récurrence forte sur $p \in \mathbb{N}$.

• Pour $p = 0$, $0 = c \times 0 + 0$ avec $q = 0, r = 0$.

• Soit $p \geq 0$. Si $p+1 < c$, on prend $q = 0$ et $r = p+1$. Si $p+1 \geq c$, alors $0 \leq p+1-c \leq p$. Par hypothèse de récurrence, il existe q', r' tels que $p+1-c = cq' + r'$ avec $0 \leq r' < c$, d'où $p+1 = c(q'+1) + r'$.

(b) Récurrence forte sur $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit n l'unique entier tel que $b^n \leq N < b^{n+1}$ (Question 5).

Effectuons la division euclidienne de N par b^n : $N = qb^n + r$ avec $0 \leq r < b^n$.

Puisque $b^n \leq N < b^{n+1}$, on a $1 \leq q \leq b-1$. On pose $a_n = q$.

Si $r = 0$, $N = a_n b^n$ est une écriture valide. Si $r > 0$, $r < b^n \leq N$, donc par H.R., r admet une écriture en base b de degré au plus $n-1$. L'existence est ainsi démontrée.

Partie III : Unicité de la décomposition

7. D'après la question 3b, $b^n \leq x < b^{n+1}$ et $b^m \leq x < b^{m+1}$.

Par l'unicité démontrée en question 5b, on conclut immédiatement que $n = m$.

8. Supposons par l'absurde que les coefficients ne soient pas tous égaux.

Soit $k = \max\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_i \neq a'_i\}$.

$$(a_k - a'_k)b^k = \sum_{i=0}^{k-1} (a'_i - a_i)b^i \implies |a_k - a'_k|b^k \leq (b-1) \sum_{i=0}^{k-1} b^i = b^k - 1$$

Comme $a_k \neq a'_k$, $|a_k - a'_k| \geq 1$, ce qui donne $b^k \leq b^k - 1$, une ****contradiction****.

On a donc $a_i = a'_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie IV : Une question ouverte

9. La seule suite qui convient est la suite géométrique $u_n = 2^n$.
- **Synthèse** : Si $u_n = 2^n$, l'existence et l'unicité découlent directement de l'écriture en base 2 (Parties I à III).
 - **Analyse** : Pour $N = 1$, le seul choix possible est $u_0 = 1$. Pour $N = 2$, u_1 doit être égal à 2. Par récurrence, la somme maximale de tous les termes jusqu'au rang k est $\sum_{i=0}^k u_i = 2^{k+1} - 1$. Pour représenter $N = 2^{k+1}$ de manière unique sans répétitions, il est nécessaire que $u_{k+1} = 2^{k+1}$.

Problème 2 : Des suites vérifiant des trucs

1. ($\Rightarrow$) Évident car $n \leq n+1 \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$.
($\Leftarrow$) Récurrence immédiate sur la différence $m - n \geq 0$ en utilisant la transitivité de la relation $\leq$.
2. Soit u une suite croissante au sens de la définition. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, posons $M = n$.
Pour tout $m \geq M = n$, la croissance implique $u_m \geq u_n$. La suite est donc pseudo-croissante.
3. Soient u et v deux suites pseudo-croissantes. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - Il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq M_1, u_m \geq u_n$.
 - Il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq M_2, v_m \geq v_n$.Posons $M = \max(M_1, M_2)$. Pour tout $m \geq M$, $(u+v)_m = u_m + v_m \geq u_n + v_n = (u+v)_n$.
La suite $(u+v)_n$ est donc pseudo-croissante.
4. Raisonnons par l'absurde. Soit $n = 0$, de sorte que $u_0 = (-1)^0 = 1$.
S'il existait $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq M, u_m \geq u_0 = 1$, en choisissant un entier impair $m \geq M$, on aurait $u_m = -1 \geq 1$, ce qui est ****absurde****.
5. Posons $w_n = n + (-1)^n$.
 - $w_0 = 1$ et $w_1 = 0$, donc $w_1 < w_0$: la suite w n'est pas croissante.
 - Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $w_m \geq m - 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, en choisissant $M = n + 2$, pour tout $m \geq M$, $w_m \geq m - 1 \geq n + 1 > n + (-1)^n = w_n$. w est donc pseudo-croissante.

La réciproque de la question 2 est donc ****FAUSSE****.

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
 - Pseudo-croissance : $\exists M_1 \in \mathbb{N}, \forall m \geq M_1, u_m \geq u_k$.
 - Pseudo-décroissance : $\exists M_2 \in \mathbb{N}, \forall m \geq M_2, u_m \leq u_k$.En posant $N = \max(M_1, M_2)$, pour tout $m \geq N$, on a $u_k \leq u_m \leq u_k \Rightarrow u_m = u_k$.
- (b) Pour $k = 0$, d'après 6a, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N_0, u_m = u_0$.
Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, d'après 6a, il existe $N_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N_n, u_m = u_n$.
En choisissant $m = \max(N_0, N_n)$, on a $u_n = u_m = u_0$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc ****constante****.

Du Rab

1. Soit $S = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_{i,j}$.
La somme de chaque ligne est négative ou nulle ($\sum_j a_{i,j} \leq 0$), donc $S \leq 0$.
La somme de chaque colonne est positive ou nulle ($\sum_i a_{i,j} \geq 0$), donc $S \geq 0$.
On a donc $S = 0$, ce qui impose que la somme de chaque ligne et de chaque colonne est nulle.
Pour chaque ligne/colonne, la somme des termes $\in \{-1, 0, 1\}$ étant nulle, le nombre de termes non nuls (1 et -1) est nécessairement pair (0, 2 ou 4).
Par conséquent, le nombre de 0 sur chaque ligne est impair (5, 3 ou 1). Pour minimiser le total de 0, le choix optimal est d'avoir au moins un 0 par ligne. On peut construire une grille valide avec

exactement un 0 par ligne (sur la diagonale principale) et des 1 et -1 bien équilibrés.

Le plus petit nombre de 0 possible est donc **5**.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(xf(y)) = yf(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- Pour $x = 1$, $f(f(y)) = yf(1)$. Posons $c = f(1) > 0$, d'où $f(f(y)) = cy$.
- Évaluons $f(cx) = f(f(f(x))) = cf(x)$. Par récurrence, $f(c^k x) = c^k f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $c \neq 1$, en faisant tendre $k \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$), l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ mène à une contradiction. Donc $c = 1 \implies f(1) = 1$ et f est une ****involution**** ($f(f(y)) = y$).
- L'équation devient $f(xf(y)) = yf(x)$. Pour $y = 1$, $f(x) = f(x)$. Comme f est une involution injective et multiplicative ($f(xy) = f(x)f(y)$), la seule solution continue/décroissante tendant vers 0 en $+\infty$ est :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$