

Série MPSI - vrai DS n°0002

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Maîtrise des symboles, Récurrences et Raisonnements fondamentaux (3h)

Profil : [Classique / Sélectif]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★★

Exercice 0 : De la quantification

Pour chacune des assertions suivantes, indiquer, sans justification, si elle est vraie ou fausse. *(Deux points par bonne réponse et un point en moins par fausse réponse).*

1. $\forall x \in [2, 4], \quad x^2 > 1.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}_-, \quad x^2 = 1.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y = 0.$
5. $\exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x + y = 0.$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad z > y \implies z > x.$
7. $\exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists z \in \mathbb{R}, \quad z = x + y.$
8. $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq f(y).$

Exercice 1 : Raisonnement logique

1. (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une assertion logique qui exprime que f est strictement décroissante.
(b) Donner la négation de l'assertion précédente. Faire une phrase en français pour dire ce que cette dernière phrase veut dire.
2. On note $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On considère les assertions suivantes :

$$(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists p \in \mathbb{P}, \quad p > n$$

et

$$(B) \quad \exists p \in \mathbb{P}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad p > n$$

- (a) Traduire chacune de ces assertions par une phrase en français.
(b) Donner la négation formelle de chacune de ces assertions.
(c) Déterminer, en justifiant, si A et B sont vraies ou fausses.
3. Donner en français et sans justification l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r > n, \quad \forall q > r, \quad u_q > 0$$

4. On considère $P(r, r', m, k, c_0, c, e)$ un prédicat dépendant des variables $r, r' \in]0, 1[, m, k \in \mathbb{N}, c_0 \in \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}$ et d'une variable $e \in E$ avec E un ensemble fixé.
Donner la négation de l'assertion :

$$\forall r, r' \in]0, 1[, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \exists c_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall e \in E, \quad \forall c > c_0, \quad P(r, r', m, k, c_0, c, e)$$

Exercice 2 : Soyez forts !

On pose $u_0 = 1$. Pour un entier naturel $n \geq 1$, on note respectivement q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par 3 de sorte que $n = 3q + r$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$, et on définit :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{u_q + u_{2q}}{n+2}$$

Par exemple, $5 = 3 \times 1 + 2$, donc $u_5 = u_4 + \frac{u_1 + u_2}{7}$, et $16 = 3 \times 5 + 1$, donc $u_{16} = u_{15} + \frac{u_5 + u_{10}}{18}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Démontrer que $3q \leq n$ et en déduire que $(q+1) + (2q+1) \leq n+2$.
3. Démontrer soigneusement que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq n+1$.

Exercice 3 : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{3(n+1)u_{n+1} - 2nu_n - 2n + 1}{n+2}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$, puis déterminer le terme général de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En déduire le terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème 1 : Existence et unicité de la décomposition en base b

Soit b un entier tel que $b \geq 2$; on dit que b est une base. Une écriture en base b d'un entier naturel non nul x est une égalité :

$$x = a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n$$

où $a_0, \dots, a_n \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ et $a_n \neq 0$. On note alors $x = \overline{a_na_{n-1} \dots a_0}^b$.

L'objectif de ce problème est de démontrer l'existence et l'unicité de l'écriture en base b d'un entier naturel non nul. Cela signifie :

- **(Existence)** Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ tels que $a_n \neq 0$ et $x = a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n$.
- **(Unicité)** Si $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$, $a'_0, \dots, a'_m \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$, $a_n \neq 0$, $a'_m \neq 0$ et :

$$a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n = a'_0 + a'_1b + \dots + a'_mb^m$$

alors $n = m$ et $a_i = a'_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Par exemple, l'écriture en base 3 de 65 est $65 = 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$ et on a alors $65 = \overline{2102}^3$.

Partie I : Encadrement d'un entier par des puissances de b

1. On prend d'abord $b = 2$. Écrire 13 et 27 en base 2 puis en base 5, sous la forme $x = a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n$ (sans justification).
2. Démontrer que la suite $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. (a) Démontrer précisément et rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + b + \dots + b^{n-1} = \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

- (b) Pour $x = a_0 + \dots + a_nb^n$ avec $a_n \neq 0$, démontrer que :

$$b^n \leq x < b^{n+1}$$

Indication : pour la majoration, remarquer que $a_i \leq b-1$ pour i de 0 à $n-1$, puis sommer les inégalités obtenues en utilisant la question précédente.

4. (a) Démontrer l'inégalité de Bernoulli, qui affirme que, pour tout réel $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+t)^n \geq 1+nt$$

Si l'on utilise un résultat non vu en classe, on le démontre.

- (b) Écrire avec des quantificateurs une proposition logique P signifiant que la suite $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
 (c) Écrire la négation de la proposition précédente, que l'on notera Q .
 (d) Est-ce que P est vraie ? Est-ce que Q est vraie ? On attend une preuve mathématique précise.
5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $A = \{p \in \mathbb{N} \mid b^p > N\}$.

- (a) En utilisant la question précédente, montrer que A est non vide puis qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$b^n \leq N < b^{n+1}$$

- (b) Démontrer que l'entier $n \in \mathbb{N}$ de la question précédente est unique, c'est-à-dire que c'est l'unique entier vérifiant la double inégalité de la question précédente.

Partie II : Existence de la décomposition

6. (a) Démontrer la partie existence du théorème de division euclidienne : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$p = cq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < c$$

On pourra procéder par récurrence de manière bien rigoureuse.

- (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que N admet une écriture en base b (c'est-à-dire démontrer la partie existence du théorème).

Indication : on pourra procéder par récurrence puis effectuer la division euclidienne de N par b , ou par b^n avec n choisi comme en question 5.

Partie III : Unicité de la décomposition

On reprend les notations de la partie unicité du théorème explicité en préambule. On suppose donc que :

$$x = a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n = a'_0 + a'_1b + \dots + a'_mb^m$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$, $a'_0, \dots, a'_m \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$, et avec $a_n \neq 0$ et $a'_m \neq 0$.

7. Démontrer que $n = m$. *Indication : on pourra utiliser les questions 3 et 5.*
 8. Démontrer que : $a_0 = a'_0, \dots, a_n = a'_n$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*

Partie IV : Une question ouverte

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. On dit que cette suite convient si tout entier $N \in \mathbb{N}^*$ s'écrit, de manière unique, comme une somme finie de termes distincts de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chacun étant pris au plus une fois.

De manière plus précise, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- **(Existence)** Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\epsilon_0, \dots, \epsilon_k \in \{0, 1\}$, avec $\epsilon_k = 1$, tels que :

$$N = \epsilon_0 u_0 + \epsilon_1 u_1 + \dots + \epsilon_k u_k$$

- **(Unicité)** Si $k, k' \in \mathbb{N}$, $\epsilon_0, \dots, \epsilon_k \in \{0, 1\}$, $\epsilon'_0, \dots, \epsilon'_{k'} \in \{0, 1\}$, $\epsilon_k = 1$, $\epsilon'_{k'} = 1$ et :

$$\epsilon_0 u_0 + \epsilon_1 u_1 + \dots + \epsilon_k u_k = \epsilon'_0 u_0 + \epsilon'_1 u_1 + \dots + \epsilon'_{k'} u_{k'}$$

alors $k = k'$ et $\epsilon_j = \epsilon'_j$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui conviennent.

Cette question est plus difficile que les précédentes. Toute piste de recherche même partielle sera valorisée.

Problème 2 : Des suites vérifiant des trucs

Dans cet exercice, on adopte la définition suivante (*attention, ce n'est PAS la définition adoptée dans le cours*) : une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles est croissante si :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \leq m \implies u_n \leq u_m$$

On dira par ailleurs que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists M \in \mathbb{N} : \quad \forall m \geq M, \quad u_m \geq u_n$$

1. On dit qu'une suite à valeurs réelles est bachélièrement croissante si elle vérifie la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$$

Montrer qu'une suite est bachélièrement croissante si et seulement si elle est croissante. Dans la suite de l'énoncé, on ne fera plus la distinction entre ces deux propriétés.

2. Montrer que toute suite croissante est pseudo-croissante.
3. Montrer que la somme de deux suites pseudo-croissantes est pseudo-croissante.
4. Montrer que la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas pseudo-croissante.
5. En considérant la suite $(n + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que la réciproque de la question 2 est fausse.
6. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est pseudo-décroissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists M \in \mathbb{N} : \quad \forall m \geq M, \quad u_m \leq u_n$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à la fois pseudo-croissante et pseudo-décroissante.

- (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall m \geq N, \quad u_m = u_k$.
- (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Du Rab, à ne faire que si vous avez tout fait :

1. Dans chaque case d'une grille 5×5 , Camille écrit 0, 1 ou -1 . On suppose que la somme des nombres de chaque colonne est positive ou nulle, et la somme des nombres de chaque ligne est négative ou nulle. Quel est le plus petit nombre de 0 qu'il peut y avoir sur la grille ?
2. Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et qui vérifient $f(xf(y)) = yf(x)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.