

Série MPSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0003

Mathématiques — Septembre 2022. Corrigé par Maths-Ingé

Logique, Applications sur $\mathcal{P}(E)$ & Sommes d'Entiers (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Questions flash

1. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

(a) f est injective : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

(b) f est surjective : $\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x)$.

(c) $y \in f(A) : \exists x \in A, \quad y = f(x)$.

(d) $x \in f^{-1}(B) : x \in E \wedge f(x) \in B$.

2. (a) **Traduction** : $\forall M \in 2\mathbb{N} + 1, \quad \exists n \in 2\mathbb{N} + 1, \quad n > M$.

Démonstration : Soit $M \in 2\mathbb{N} + 1$. Le nombre $n = M + 2$ est encore un entier impair et vérifie bien $n > M$. Ainsi, l'ensemble des entiers impairs n'admet pas de plus grand élément.

(b) **Traduction** : $\exists T \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$.

Démonstration : Posons $T = 4\pi > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

La fonction f est donc périodique (de période 4π).

(c) **Traduction** : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \quad x < y \implies \exists z \in \mathbb{Q}, \quad x < z < y$.

Démonstration : Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x < y$. Posons $z = \frac{x + y}{2}$.

Comme $\mathbb{Q}$ est stable par addition et division par un entier non nul, $z \in \mathbb{Q}$.

De plus, $x < y \implies 2x < x + y < 2y \implies x < z < y$.

3. (a) **Langage courant** : « Il existe un réel $M \in [0, 2[$ qui majore l'intervalle $[0, 2[$ ».

Valeur de vérité : Fausse. $[0, 2[$ n'admet pas de maximum dans $[0, 2[$.

Justification : Si un tel M existait, en choisissant $x = \frac{M + 2}{2} \in [0, 2[$, on aurait $x > M$, contradiction.

Négation : $\forall M \in [0, 2[, \quad \exists x \in [0, 2[, \quad x > M$.

(b) **Langage courant** : « Il existe un réel $M \in [0, 2[$ qui minore l'intervalle $[0, 2[$ ».

Valeur de vérité : Vraie.

Justification : Il suffit de choisir $M = 0 \in [0, 2[$. Pour tout $x \in [0, 2[$, on a bien $x \geq 0$.

(c) **Langage courant** : « Tout nombre réel admet au moins une racine carrée complexe ».

Valeur de vérité : Vraie.

Justification : Soit $Z \in \mathbb{R}$. Si $Z \geq 0$, $z = \sqrt{Z} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ convient. Si $Z < 0$, $z = i\sqrt{-Z} \in \mathbb{C}$ convient car $z^2 = i^2(-Z) = Z$.

4. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) = A$.

Étudions l'appartenance de n_0 à l'ensemble A :

- Si $n_0 \in A$, alors par définition de A , $n_0 \notin f(n_0)$. Comme $f(n_0) = A$, cela implique $n_0 \notin A$, ce qui est contradictoire.
- Si $n_0 \notin A$, alors par définition de A , $n_0 \in f(n_0)$. Comme $f(n_0) = A$, cela implique $n_0 \in A$, ce qui est également contradictoire.

Dans tous les cas, nous obtenons une contradiction. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \neq A$.

Exercice 2 — Simplification de sommes

1. Une première méthode :

(a) Sommons la relation télescopique $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=1}^n (2k+1) \implies (n+1)^2 - 1^2 = 2S_1 + n$$

D'où $n^2 + 2n = 2S_1 + n \implies n(n+2) = 2S_1 + n$. On en déduit : $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) De même, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Sommons de 1 à n :

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n \implies n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2 + 3S_1 + n$$

D'où $n(n^2 + 3n + 3) = 3S_2 + 3S_1 + n$.

Injectons $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$3S_2 = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

Comme $2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$, on conclut : $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) On part de l'identité $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. En sommant de $k = 1$ à n , le membre de gauche donne $(n+1)^4 - 1$, et le membre de droite $4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$. Connaissant déjà S_1 et S_2 , on peut en isoler et exprimer S_3 .

2. Une deuxième méthode :

(a) i. Effectuons le changement d'indice $j = n+1 - k$ (quand $k = 1$, $j = n$ et quand $k = n$, $j = 1$) :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$$

ii. Par linéarité, $S_1 = \sum_{j=1}^n (n+1) - \sum_{j=1}^n j = n(n+1) - S_1 \implies 2S_1 = n(n+1) \implies$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) i. $S_2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i \right).$

Cette somme porte sur le domaine d'indices $D = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$.

En intervertissant l'ordre de sommation : $S_2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n i \right).$

ii. Calculons la somme intérieure $\sum_{i=j}^n i = S_1 - \sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(j-1)j}{2} = \frac{n(n+1) - j^2 + j}{2}.$

En réinjectant dans S_2 :

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n(n+1) - j^2 + j) = \frac{1}{2} (n^2(n+1) - S_2 + S_1) = \frac{1}{2} (n^2(n+1) + S_1 - S_2)$$

iii. Multiplions par 2 : $2S_2 = n^2(n+1) + S_1 - S_2 \implies 3S_2 = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$

On retrouve bien : $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

- (c) i. Par séparation des variables dans une somme double sur un produit d'ensembles :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = S_1 \times S_1 = \mathbf{S}_1^2$$

- ii. Décomposons la somme produit S_1^2 selon la position de i par rapport à j :

$$S_1^2 = \sum_{1 \leq i=j \leq n} ij + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = S_2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

Par ailleurs, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{1 \leq i=j \leq n} ij + \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = S_2 + \frac{S_1^2 - S_2}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2)$.

- iii. De l'égalité $S_1^2 = S_2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$, on tire directement :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2)$$

- iv. Calculons maintenant $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$ d'une autre manière en sommant sur j :

$$\sum_{j=1}^n j \left(\sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n j \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^3 + j^2) = \frac{1}{2}(S_3 + S_2)$$

En égalisant avec le résultat de la question (ii) : $\frac{1}{2}(S_3 + S_2) = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2) \implies S_3 = S_1^2$.

On conclut que : $S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Exercice 3 — Applications entre ensembles et parties de $\mathcal{P}(E)$

1. Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, -2]$ et $B = \mathbb{R}_+$:

- $f(X_1) = (\{-1, 0, 1\} \cap]-\infty, -2], \{-1, 0, 1\} \cap \mathbb{R}_+) = (\emptyset, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$.
- $f(X_2) = (\mathbb{N} \cap]-\infty, -2], \mathbb{N} \cap \mathbb{R}_+) = (\emptyset, \mathbb{N})$.
- $f(X_3) = (\mathbb{R}_- \cap]-\infty, -2], \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+) = (]-\infty, -\mathbf{2}], \{\mathbf{0}\})$.

2. Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-1, 5[$ et $B =]2, +\infty[$:

Considérons $X = \{-5\}$ et $Y = \{-10\}$. $X \neq Y$.

$$f(X) = (\{-5\} \cap]-1, 5[, \{-5\} \cap]2, +\infty[) = (\emptyset, \emptyset).$$

$$f(Y) = (\{-10\} \cap]-1, 5[, \{-10\} \cap]2, +\infty[) = (\emptyset, \emptyset).$$

Puisque $f(X) = f(Y)$ avec $X \neq Y$, f **n'est pas injective**.

3. Dans le cas général :

- $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$.
- $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$.
- $f(A \cap B) = ((A \cap B) \cap A, (A \cap B) \cap B) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B})$.

4. Soit $X \subset A$ et $Y \subset B$ tels que $X \cap B = \emptyset$ et $Y \cap A = \emptyset$.

$$f(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) = ((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B)).$$

Comme $X \subset A \implies X \cap A = X$ et $Y \subset B \implies Y \cap B = Y$, il vient :

$$f(X \cup Y) = (X \cup \emptyset, \emptyset \cup Y) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

5. **Montrons que f est injective $\iff A \cup B = E$:**

- ($\implies$) Supposons par l'absurde que $A \cup B \neq E$. Il existe alors $x \in E \setminus (A \cup B)$.
Calculons $f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$.
Comme $\{x\} \neq \emptyset$, f ne serait pas injective. Par contraposée, $A \cup B = E$.
- ($\impliedby$) Supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$.
Alors $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$.
D'où $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y$.
 f est donc bien injective.

6. Supposons f surjective. Le couple $(A, \emptyset)$ appartient à $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Il existe donc $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset) \implies X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$.

$X \cap A = A \implies A \subset X$. Comme $X \cap B = \emptyset$, on a $A \cap B \subset X \cap B = \emptyset$.

A et B sont donc deux parties disjointes.

7. Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Alors $X \subset A$ et $Y \subset B$. Comme $A \cap B = \emptyset$, $X \cap B = \emptyset$ et $Y \cap A = \emptyset$.

D'après la question 4, $f(X \cup Y) = (X, Y)$. Tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un antécédent.

f est donc surjective.

8. D'après les questions 5, 6 et 7, f est bijective si et seulement si f est injective et surjective :

$$f \text{ est bijective} \iff \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$

Autrement dit, **f est bijective si et seulement si (A, B) forme une partition de E** (c'est-à-dire $B = E \setminus A$).

Exercice 4 — Opérateurs et bornes sur $\mathbb{R}^n$

1. $T(1, 1, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0) = T(0, 0, \dots, 0)$.

Comme $(1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0)$, **T n'est pas injective.**

2. (a) Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. On cherche $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in E$ vérifiant $T(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Cela équivaut au système :

$$\begin{cases} x_{n-1} - 0 = a_{n-1} & \implies x_{n-1} = a_{n-1} \\ x_{n-2} - x_{n-1} = a_{n-2} & \implies x_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_i - x_{i+1} = a_i & \implies x_i = \sum_{k=i}^{n-1} a_k \end{cases}$$

Il existe bien un unique n -uplet de E répondant à la question, avec $x_i = \sum_{k=i}^{n-1} a_k$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

(b) Tout élément $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ admet un antécédent dans $E \subset \mathbb{R}^n$ par T .
 T est donc surjective.

3. (a) $m_p(1, 0, \dots, 0) = 1 = m_p(0, 1, 0, \dots, 0)$. **m_p n'est pas injective.**

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $m_p(y, y, \dots, y) = y$. **m_p est surjective.**

4. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega = [0, 1]^n$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(m_{n-1} \circ T)(x_1, \dots, x_n) < \frac{1}{n-1}$.

Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $x_i - x_{i+1} < -\frac{1}{n-1} \implies x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n-1}$.

En sommant ces $n-1$ inégalités strictes pour i allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \implies x_n - x_1 > 1 \implies x_n > x_1 + 1 \geq 1$$

Ce qui contredit le fait que $x_n \in [0, 1]$.

Ainsi, **pour tout** $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $(m_{n-1} \circ T)(x_1, \dots, x_n) \geq -\frac{1}{n-1}$.

5. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $x_1 - x_2 \leq x_1 \leq 1$. Chaque différence est majorée par 1, donc leur maximum aussi.

Grâce à la question précédente, on a l'inclusion : $(m_{n-1} \circ T)(\Omega) \subset \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right]$.

6. Pour $x \in [0, 1]$, $(x, 0, \dots, 0) \in \Omega$.

$$T(x, 0, \dots, 0) = (x - 0, 0 - 0, \dots, 0 - 0) = (x, 0, \dots, 0).$$

$$\text{D'où } (m_{n-1} \circ T)(x, 0, \dots, 0) = \max(x, 0, \dots, 0) = x.$$

7. Quand x décrit $[0, 1]$, l'image $(m_{n-1} \circ T)(x, 0, \dots, 0) = x$ décrit $[0, 1]$.

$$\text{D'où } [0, 1] \subset (m_{n-1} \circ T)(\Omega).$$

8. Soit $a \in \left[-\frac{1}{n-1}, 0\right]$. Posons $X = (0, -a, -2a, \dots, -(n-1)a)$.

Comme $a \leq 0$, $-a \geq 0$. Comme $a \geq -\frac{1}{n-1}$, $-(n-1)a \leq 1$.

Chaque composante de X appartient à $[0, 1]$, donc $X \in \Omega$.

$$\text{Calculons } T(X) = (0 - (-a), -a - (-2a), \dots, -(n-2)a - (-(n-1)a)) = (a, a, \dots, a).$$

$$\text{D'où } (m_{n-1} \circ T)(X) = \max(a, a, \dots, a) = a.$$

Tout réel $a \in \left[-\frac{1}{n-1}, 0\right]$ **admet donc un antécédent dans** Ω .

9. Des questions 7 et 8, on déduit que $\left[-\frac{1}{n-1}, 0\right] \cup [0, 1] = \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right] \subset (m_{n-1} \circ T)(\Omega)$.

Combiné avec l'inclusion réciproque de la question 5, on conclut :

$$(\mathbf{m}_{\mathbf{n}-1} \circ \mathbf{T})(\mathbf{\Omega}) = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}-1}, \mathbf{1}\right]$$