

Série MPSI - vrai DS n°0003

Mathématiques — Sept. 2022, Quelquepart

Logique, Applications sur $\mathcal{P}(E)$ & Sommes d'Entiers (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★★

Exercice 1 — Questions flash

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles E et F , $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Traduire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques les notions suivantes :
 - (a) f est injective ;
 - (b) f est surjective ;
 - (c) $y \in f(A)$;
 - (d) $x \in f^{-1}(B)$.
2. Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique à l'aide de quantificateurs puis les démontrer :
 - (a) L'ensemble des entiers impairs n'a pas de maximum ;
 - (b) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est périodique ;
 - (c) Entre deux rationnels distincts, il existe au moins un troisième rationnel.
3. Traduire les assertions suivantes en langage courant, dire si elles sont vraies ou fausses (en le justifiant). Dans le cas d'une assertion fausse, écrire sa négation.
 - (a) $\exists M \in [0, 2[, \quad \forall x \in [0, 2[, \quad x \leq M$
 - (b) $\exists M \in [0, 2[, \quad \forall x \in [0, 2[, \quad x \geq M$
 - (c) $\forall Z \in \mathbb{R}, \quad \exists z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = Z$
4. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une application et $A = \{p \in \mathbb{N} \mid p \notin f(p)\}$.
À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \neq A$.

Exercice 2 — Simplification de sommes

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$.

Le but de cet exercice est de retrouver les expressions simplifiées de S_1 , S_2 et S_3 par diverses méthodes. On suppose donc que l'on ne connaît pas ces trois formules.

1. Une première méthode :

- (a) En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$, montrer que $n(n+2) = 2S_1 + n$ et en déduire l'expression de S_1 .
- (b) En partant de $(k+1)^3 - k^3$, montrer que $n(n^2 + 3n + 3) = 3S_2 + 3S_1 + n$ et en déduire l'expression de S_2 .
- (c) Donner une méthode sur le même modèle permettant le calcul de S_3 (on ne demande pas d'effectuer explicitement le calcul).

2. Une deuxième méthode :

- (a) i. À l'aide d'un changement d'indice très simple, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{j=1}^n (n+1-j)$$

- ii. En déduire que $S_1 = n(n+1) - S_1$ et retrouver ainsi l'expression de S_1 .
- (b) i. Démontrer que :

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n i \right)$$

- ii. En déduire que $S_2 = \frac{1}{2} (n^2(n+1) + S_1 - S_2)$.
- iii. Retrouver ainsi l'expression de S_2 .
- (c) i. Montrer que :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} ij = S_1^2$$

- ii. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \frac{1}{2} (S_3 + S_2)$$

- iii. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{1}{2} (S_3 - S_2)$$

- iv. Déduire des trois questions précédentes l'expression de S_3 .

Exercice 3 — Applications entre ensembles et parties de $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Soient A et B deux parties non vides de E . On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A et $\mathcal{P}(B)$ l'ensemble des parties de B .

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\longmapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

- Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, -2]$ et $B = \mathbb{R}_+$.
Calculer les images par f de $X_1 = \{-1, 0, 1\}$, de $X_2 = \mathbb{N}$ et de $X_3 = \mathbb{R}_-$.
- Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}$, $A =]-1, 5[$ et $B =]2, +\infty[$. Montrer que f n'est pas injective.

On se replace désormais dans le cas général.

- Calculer $f(E)$, $f(A \cup B)$ et $f(A \cap B)$.
- Soit X une partie de A et Y une partie de B telles que $X \cap B = \emptyset$ et $Y \cap A = \emptyset$. Calculer $f(X \cup Y)$.
- Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
- Montrer que si f est surjective, alors A et B sont deux parties disjointes.
- Montrer que si A et B sont deux parties disjointes, alors f est surjective.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Exercice 4 — Opérateurs et bornes sur $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

- Montrer que la fonction T n'est pas injective.

2. On note $E \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble défini par $E = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

(a) Montrer que pour tout $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in E$ tel que :

$$T(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (a_1, \dots, a_{n-1})$$

(b) La fonction T est-elle surjective ?

On note désormais, pour tout entier $p \geq 2$, la fonction :

$$\begin{array}{ccc} m_p : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \max(x_1, \dots, x_p) \end{array}$$

3. (a) La fonction m_p est-elle injective ?

(b) La fonction m_p est-elle surjective ?

On pose enfin $\Omega = [0, 1]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in [0, 1]\}$.

On souhaite montrer que $(m_{n-1} \circ T)(\Omega) = \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right]$.

Notons que pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(m_{n-1} \circ T)(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n)$$

4. Montrer que si $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, alors $(m_{n-1} \circ T)(x_1, \dots, x_n) \geq -\frac{1}{n-1}$.

Indication : on pourra effectuer un raisonnement par l'absurde.

5. En déduire que $(m_{n-1} \circ T)(\Omega) \subset \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right]$.

6. Soit $x \in [0, 1]$, calculer $(m_{n-1} \circ T)(x, 0, \dots, 0)$.

7. Montrer que $[0, 1] \subset (m_{n-1} \circ T)(\Omega)$.

8. Montrer que si $a \in \left[-\frac{1}{n-1}, 0\right]$, alors a admet un antécédent par $m_{n-1} \circ T$ dans Ω .

Indication : on pourra examiner la famille $(0, -a, -2a, \dots, -(n-1)a)$.

9. Conclure.