

Série MPSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0004
Mathématiques — Novembre 2022. Corrigé par Maths-Ingé
Complexes, Module sur $\mathbb{U}$ & Sommes Trigonométriques (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :
maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation $(E) : z^3 - (3 + 2i)z^2 + 6(3i - 1)z + 18(1 - 2i) = 0$.

1. Recherche de la solution réelle :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ une solution réelle de (E) . En injectant x_0 dans l'équation :

$$x_0^3 - (3 + 2i)x_0^2 + 6(3i - 1)x_0 + 18(1 - 2i) = 0$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$(x_0^3 - 3x_0^2 - 6x_0 + 18) + i(-2x_0^2 + 18x_0 - 36) = 0$$

Ce qui équivaut au système réel :

$$\begin{cases} x_0^3 - 3x_0^2 - 6x_0 + 18 = 0 \\ -2x_0^2 + 18x_0 - 36 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0^2(x_0 - 3) - 6(x_0 - 3) = 0 \\ -2(x_0 - 3)(x_0 - 6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x_0^2 - 6)(x_0 - 3) = 0 \\ -2(x_0 - 3)(x_0 - 6) = 0 \end{cases}$$

La seule valeur réelle annulant simultanément les deux équations est $x_0 = 3$.

2. Factorisation et résolution :

On peut donc factoriser le polynôme par $(z - 3)$:

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + 6(3i - 1)z + 18(1 - 2i) = (z - 3)(z^2 - 2iz - 6 + 12i)$$

Résolvons l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2iz - 6 + 12i = 0$.

Son discriminant réduit vaut :

$$\Delta' = (-i)^2 - 1 \times (-6 + 12i) = -1 + 6 - 12i = 5 - 12i$$

Cherchons une racine carrée complexe $\delta = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) de Δ' :

$$\delta^2 = 5 - 12i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ a^2 + b^2 = |\Delta'| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13 \\ 2ab = -12 < 0 \end{cases}$$

En additionnant et soustrayant les deux premières lignes, on obtient $2a^2 = 18 \implies a = \pm 3$ et $2b^2 = 8 \implies b = \mp 2$ (car $ab < 0$). On choisit $\delta = 3 - 2i$.

Les deux autres solutions complexes sont donc :

$$z_1 = i + (3 - 2i) = 3 - i \quad \text{et} \quad z_2 = i - (3 - 2i) = -3 + 3i$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{3, 3 - i, -3 + 3i\}$.

Exercice 2 — Étude d'une fonction sur le cercle unité $\mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{U}$ (donc $|z| = 1$). On pose $x = |z - 1|$.

1. Par l'inégalité triangulaire :

$$|z - 1| \leq |z| + |-1| = 1 + 1 = 2 \quad \text{et} \quad |z^2 - z + 1| \leq |z|^2 + |-z| + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

On en déduit un encadrement grossier :

$$3 \times 0 - 3 \leq 3|z - 1| - |z^2 - z + 1| \leq 3 \times 2 - 0 \implies -3 \leq 3|z - 1| - |z^2 - z + 1| \leq 6$$

Conclusion : Cet encadrement est bien plus large que $[-1, 13/4]$. L'inégalité triangulaire brute ne permet pas de conclure.

2. Comme $z \in \mathbb{U}$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Exprimons le carré du module :

$$\begin{aligned} |z^2 - z + 1|^2 &= (z^2 - z + 1)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = (z^2 - z + 1) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 \right) \\ &= 1 - z + z^2 - \frac{1}{z} + 1 - z + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 \\ &= 3 - 2 \left(z + \frac{1}{z} \right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \\ &= 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}(z^2) \end{aligned}$$

3. On sait que $\operatorname{Re}(z^2) = 2\operatorname{Re}(z)^2 - 1$.

Exprimons $\operatorname{Re}(z)$ en fonction de $x = |z - 1|$:

$$x^2 = |z - 1|^2 = (z - 1)(\bar{z} - 1) = |z|^2 - (z + \bar{z}) + 1 = 2 - 2\operatorname{Re}(z) \implies \operatorname{Re}(z) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

On en déduit alors :

$$\operatorname{Re}(z^2) = 2 \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^2 - 1 = 2 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} \right) - 1 = 1 - 2x^2 + \frac{x^4}{2}$$

4. Injectons les résultats précédents dans l'expression de $|z^2 - z + 1|^2$:

$$|z^2 - z + 1|^2 = 3 - 4 \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + 2 \left(1 - 2x^2 + \frac{x^4}{2} \right) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

En prenant la racine carrée : $|z^2 - z + 1| = \sqrt{(x^2 - 1)^2} = |x^2 - 1|$.

On obtient bien : $3|z - 1| - |z^2 - z + 1| = 3x - |x^2 - 1|$.

5. Étudions la fonction $f : x \mapsto 3x - |x^2 - 1|$ sur $\mathbb{R}_+$:

- Sur $[0, 1]$, $x^2 - 1 \leq 0$, d'où $f(x) = 3x + x^2 - 1 = x^2 + 3x - 1$.
 $f'(x) = 2x + 3 > 0$ sur $[0, 1]$. f est strictement croissante de $f(0) = -1$ à $f(1) = 3$.
- Sur $[1, 2]$, $x^2 - 1 \geq 0$, d'où $f(x) = 3x - (x^2 - 1) = -x^2 + 3x + 1$.
 $f'(x) = -2x + 3$. f' s'annule en $x = 3/2$. f est strictement croissante sur $[1, 3/2]$ avec $f(3/2) = 13/4$, puis strictement décroissante sur $[3/2, 2]$ avec $f(2) = 3$.

6. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{U}$ s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi]$.

$$\text{Alors } x = |e^{i\theta} - 1| = \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|.$$

Lorsque θ varie dans $[-\pi, \pi]$, $\frac{\theta}{2}$ varie dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc x décrit exactement $[0, 2]$.

7. D'après l'étude des variations de f sur $[0, 2]$, le minimum de f vaut $f(0) = -1$ et son maximum vaut $f(3/2) = 13/4$.

On en déduit l'inégalité (*) : $\forall z \in \mathbb{U}, \quad -1 \leq 3|z - 1| - |z^2 - z + 1| \leq \frac{13}{4}$.

8. (a) Γ_1 est le cercle centré en l'origine de rayon 1. Γ_2 est le cercle de centre 1 et de rayon $3/2$.
 Soit $z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Alors $|z| = 1$ et $x = |z - 1| = 3/2$.
 D'après la question 3, $\operatorname{Re}(z) = 1 - \frac{(3/2)^2}{2} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$.
 Comme $|z| = 1$, $\operatorname{Im}(z) = \pm \sqrt{1 - (-1/8)^2} = \pm \frac{\sqrt{63}}{8} = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8}$.
 Les deux points d'intersection sont $z = -\frac{1}{8} \pm i \frac{3\sqrt{7}}{8}$.
 (b) La borne -1 est atteinte pour $x = 0 \iff \mathbf{z} = \mathbf{1}$.
 La borne $\frac{13}{4}$ est atteinte pour $x = \frac{3}{2} \iff \mathbf{z} = -\frac{1}{8} \pm i \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Problème — Sommes trigonométriques et identités sur $\mathbb{U}$

Préliminaire

1. (a) $e^{il\frac{2\pi}{n}} = 1 \iff l\frac{2\pi}{n} \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \mathbf{l} \in n\mathbb{Z}$ (l est un multiple de n).
 (b) Posons $S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{il\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2l\pi}{n}}\right)^k$.
 - Si $l \in n\mathbb{Z}$, la raison vaut 1, donc $S = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \mathbf{n}$.
 - Si $l \notin n\mathbb{Z}$, la raison est différente de 1, donc par la formule des sommes géométriques :
$$S = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2l\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2l\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2l\pi}}{1 - e^{i\frac{2l\pi}{n}}} = \mathbf{0} \quad (\text{car } e^{i2l\pi} = 1)$$

 (c) Par partie réelle, $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2l\frac{k\pi}{n}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{il\frac{2k\pi}{n}} - 1\right)$.
 - Si $l \in n\mathbb{Z}$, la somme vaut $n - 1$.
 - Si $l \notin n\mathbb{Z}$, la somme vaut $0 - 1 = -1$.

Partie 1 — Première démonstration (par intégration et récurrence)

2. f_d est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $f_d(x + \pi) = \frac{\sin^2(d(x + \pi))}{\sin^2(x + \pi)} = \frac{(-\sin(dx))^2}{(-\sin x)^2} = f_d(x)$.
 f_d est donc π -périodique.
 3. Soit $x \in]0, \pi[$. Par les formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin((d+1)x) &= \sin(dx) \cos(x) + \cos(dx) \sin(x) \\ \sin((d-1)x) &= \sin(dx) \cos(x) - \cos(dx) \sin(x)\end{aligned}$$

En élevant au carré et en ajoutant les deux expressions :

$$\sin^2((d+1)x) + \sin^2((d-1)x) = 2\sin^2(dx) \cos^2(x) + 2\cos^2(dx) \sin^2(x)$$

En utilisant $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et $\cos^2(dx) - \sin^2(dx) = \cos(2dx)$:

$$= 2\sin^2(dx)(1 - \sin^2 x) + 2\cos^2(dx) \sin^2 x = 2\sin^2(dx) + 2\sin^2 x \cos(2dx)$$

En divisant par $\sin^2 x \neq 0$, on obtient l'égalité demandée.

4. Démontrons par récurrence double sur $d \in \mathbb{N}^*$ l'existence de ces réels b_l :

- **Pour** $d = 1$: $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 = 1 \cdot \cos(0x) \implies b_0 = 1$.
- **Pour** $d = 2$: $\frac{\sin^2(2x)}{\sin^2 x} = \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} = 4 \cos^2 x = 2 + 2 \cos(2x) \implies b_0 = 2, b_1 = 2$.

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie pour $d-1$ et d .

Grâce à la question 3, $\frac{\sin^2((d+1)x)}{\sin^2 x} = 2 \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2((d-1)x)}{\sin^2 x} + 2 \cos(2dx)$.

Par combinaison linéaire de combinaisons linéaires de cosinus d'angles multiples, la propriété est transmise au rang $d+1$.

5. (a) Par équivalent usuel en 0, $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ainsi $\frac{\sin(dx)}{\sin x} = \frac{\sin(dx)}{dx} \times d \times \frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \times d \times 1 = d$.

(b) En passant à la limite quand $x \rightarrow 0$ dans (**), le membre de gauche tend vers d^2 et le membre

de droite vers $\sum_{l=0}^{d-1} b_l \cos(0) = \sum_{l=0}^{d-1} b_l$.

D'où : $\sum_{l=0}^{d-1} b_l = d^2$.

6. (a) La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2 x}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur d^2 .

L'intégrale I_d est donc **parfaitement définie**.

(b) En intégrant la relation de la question 3 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$I_{d+1} + I_{d-1} = 2I_d + 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2dx) dx = 2I_d + 2 \left[\frac{\sin(2dx)}{2d} \right]_0^{\pi/2} = 2I_d + 0 = 2I_d$$

(c) $(I_d)_{d \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $I_0 = 0$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$.

Sa raison vaut $I_1 - I_0 = \frac{\pi}{2}$. On conclut : $\forall d \in \mathbb{N}, I_d = d \frac{\pi}{2}$.

7. (a) Intégrons la relation (**) terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$I_d = \sum_{l=0}^{d-1} b_l \int_0^{\pi/2} \cos(2lx) dx = b_0 \int_0^{\pi/2} 1 dx + \sum_{l=1}^{d-1} b_l \left[\frac{\sin(2lx)}{2l} \right]_0^{\pi/2} = b_0 \frac{\pi}{2}$$

(b) Puisque $I_d = d \frac{\pi}{2} = b_0 \frac{\pi}{2}$, il vient directement : $b_0 = d$.

8. En remplaçant chaque terme de S_d par son expression (**) :

$$S_d = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{d-1} b_l \cos\left(2l \frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{l=0}^{d-1} b_l \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2l \frac{k\pi}{n}\right)$$

Pour $l = 0$, la somme interne vaut $n-1$.

Pour $1 \leq l \leq d-1 \leq n-1$, l n'est pas multiple de n , la somme interne vaut -1 (d'après le préliminaire).

D'où : $S_d = (n-1)b_0 - \sum_{l=1}^{d-1} b_l$.

9. $S_d = (n-1)d - (d^2 - b_0) = nd - d - d^2 + d = nd - d^2$.

Conclusion : $S_d = d(n-d)$.

Partie 2 — Deuxième démonstration (par sommes géométriques et produit double)

10. Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{p=0}^{d-1} e^{i2px} = \frac{1 - e^{i2dx}}{1 - e^{i2x}} = \frac{e^{idx}(e^{-idx} - e^{idx})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} = e^{i(d-1)x} \frac{-2i \sin(dx)}{-2i \sin(x)} = \mathbf{e}^{i(\mathbf{d}-1)\mathbf{x}} \frac{\sin(\mathbf{d}\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})}$$

11. En prenant le conjugué complexe de l'égalité précédente :

$$\sum_{q=0}^{d-1} e^{-i2qx} = \mathbf{e}^{-i(\mathbf{d}-1)\mathbf{x}} \frac{\sin(\mathbf{d}\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})} \quad (\text{avec } \theta = -(d-1)x)$$

12. Effectuons le produit des deux sommes :

$$\left(\sum_{p=0}^{d-1} e^{i2px} \right) \left(\sum_{q=0}^{d-1} e^{-i2qx} \right) = \left(e^{i(d-1)x} \frac{\sin(dx)}{\sin(x)} \right) \left(e^{-i(d-1)x} \frac{\sin(dx)}{\sin(x)} \right) = \left(\frac{\sin(\mathbf{d}\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})} \right)^2$$

Par développement du produit double, on obtient bien : $\left(\frac{\sin(dx)}{\sin(x)} \right)^2 = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{q=0}^{d-1} e^{i2(p-q)x}$.

13. Séparons la somme double selon la diagonale $p = q$, la partie $p > q$ et la partie $p < q$:

$$\left(\frac{\sin(dx)}{\sin(x)} \right)^2 = \sum_{p=0}^{d-1} 1 + \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} e^{i2(p-q)x} + \sum_{0 \leq p < q \leq d-1} e^{i2(p-q)x}$$

En regroupant les termes conjugués deux à deux ($e^{i2(p-q)x} + e^{-i2(p-q)x} = 2 \cos(2(p-q)x)$) :

$$\left(\frac{\sin(\mathbf{d}\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})} \right)^2 = \mathbf{d} + 2 \sum_{0 \leq \mathbf{q} < \mathbf{p} \leq \mathbf{d}-1} \cos(2(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x})$$

14. En évaluant la relation précédente en $x = \frac{k\pi}{n}$ puis en sommant pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\sin\left(d \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} d + 2 \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2(p-q) \frac{k\pi}{n}\right)$$

On obtient exactement l'égalité souhaitée.

15. Posons $m = p - q$. Comme $0 \leq q < p \leq d-1 \leq n-2$, on a $1 \leq m \leq n-2$.

L'entier m n'étant pas un multiple de n , la question préliminaire assure que $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2m \frac{k\pi}{n}\right) = -1$.

Le nombre de couples (q, p) tels que $0 \leq q < p \leq d-1$ est $\binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2}$.

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\sin\left(d \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right)^2 = (n-1)d + 2 \times \frac{d(d-1)}{2} \times (-1) = nd - d - d^2 + d = \mathbf{nd} - \mathbf{d}^2$$

Conclusion : On retrouve bien la formule $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(d \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d)$.