

Série MPSI - vrai DS n°0004

Mathématiques — Novembre 2022, Quelquepart.

Complexes, Module sur $\mathbb{U}$ & Sommes Trigonométriques (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : **○

Exercice 1 — Équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + 6(3i - 1)z + 18(1 - 2i) = 0$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Exercice 2 — Étude d'une fonction sur le cercle unité $\mathbb{U}$

On souhaite établir l'inégalité suivante :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad -1 \leq 3|z - 1| - |z^2 - z + 1| \leq \frac{13}{4} \quad (*)$$

Soit $z \in \mathbb{U}$ un nombre complexe de module 1. On pose $x = |z - 1|$.

1. En utilisant simplement l'inégalité triangulaire, donner des majorants immédiats de $|z - 1|$ et de $|z^2 - z + 1|$. De ces résultats, déduire un encadrement de $3|z - 1| - |z^2 - z + 1|$. Conclusion ?
2. Exprimer $|z^2 - z + 1|^2$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Re}(z^2)$, où Re désigne la partie réelle.
3. Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$, puis $\operatorname{Re}(z)$ en fonction de x .
4. En déduire que :

$$3|z - 1| - |z^2 - z + 1| = 3x - |x^2 - 1|$$

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x - |x^2 - 1|$. Étudier ses variations et dresser l'allure de sa courbe représentative.
6. Lorsque z décrit $\mathbb{U}$, quel intervalle le réel x décrit-il ?
7. Démontrer l'inégalité (*).
8. (a) Soient $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $\Gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = \frac{3}{2}\right\}$. Décrire géométriquement et représenter ces ensembles. Déterminer précisément leur(s) point(s) d'intersection.
(b) Pour quelles valeurs de z les bornes -1 et $\frac{13}{4}$ de l'inégalité (*) sont-elles atteintes ?

Problème — Sommes trigonométriques et identités sur $\mathbb{U}$

Préliminaire

1. (a) Résoudre l'équation $e^{il\frac{2\pi}{n}} = 1$ d'inconnue $l \in \mathbb{Z}$.
(b) Soit $l \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{il\frac{2k\pi}{n}}$? On distinguera selon les valeurs de l .
(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2l\frac{k\pi}{n}\right)$ vaut -1 si l n'est pas un multiple de n , et vaut $n - 1$ sinon.

Le but du problème est d'établir la formule suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $d \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(d \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d) \quad (+)$$

Le sujet propose deux démonstrations indépendantes de ce résultat (Partie 1 et Partie 2). Les deux parties utilisent le résultat de la question préliminaire.

Partie 1 — Première démonstration (par intégration et récurrence)

2. Si d est un entier fixé, donner le domaine de définition et une période pour la fonction :

$$f_d : x \mapsto \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2(x)}$$

3. Soit $x \in]0, \pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. En développant $\sin((d+1)x)$ et $\sin((d-1)x)$ à l'aide des formules d'addition, montrer que :

$$\frac{\sin^2((d+1)x)}{\sin^2(x)} + \frac{\sin^2((d-1)x)}{\sin^2(x)} = 2 \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2(x)} + 2 \cos(2dx)$$

4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence qu'il existe des réels $b_0, b_1, \dots, b_{d-1}$ tels que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2(x)} = \sum_{l=0}^{d-1} b_l \cos(2lx) \quad (**)$$

5. (a) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En déduire que pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(dx)}{\sin x} = d$.

- (b) En conservant les notations de la question 4, justifier que $\sum_{l=0}^{d-1} b_l = d^2$.

6. Pour tout entier naturel d , on note $I_d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2(x)} dx$.

(a) Justifier que cette intégrale est bien définie.

(b) Justifier que pour tout entier $d \in \mathbb{N}^*$, $I_{d+1} + I_{d-1} = 2I_d$.

(c) Montrer par récurrence que pour tout $d \in \mathbb{N}$, $I_d = d \frac{\pi}{2}$.

7. Désormais, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier d tel que $0 \leq d \leq n-1$, et l'on conserve les notations de (**).

(a) En utilisant la relation (**), démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(dx)}{\sin^2(x)} dx = b_0 \frac{\pi}{2}$.

(b) En déduire que $b_0 = d$.

8. On note $S_d = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(d \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$. Montrer que :

$$S_d = (n-1)b_0 - \sum_{l=1}^{d-1} b_l$$

Indication : on pourra utiliser la question préliminaire.

9. Déduire des questions précédentes que $S_d = nd - d^2$ et conclure.

Partie 2 — Deuxième démonstration (par sommes géométriques et produit double)

Soit $x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ et $d \in \mathbb{N}^*$.

10. Montrer que :

$$\sum_{p=0}^{d-1} e^{i2px} = e^{i(d-1)x} \frac{\sin(dx)}{\sin(x)}$$

11. Sans autre calcul, exprimer la somme $\sum_{q=0}^{d-1} e^{-i2qx}$ en fonction de $\frac{\sin(dx)}{\sin(x)}$ et d'un complexe de la forme $e^{i\theta}$ avec θ à préciser.

12. En déduire que :

$$\left(\frac{\sin(dx)}{\sin(x)} \right)^2 = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{q=0}^{d-1} e^{i2(p-q)x}$$

13. En déduire finalement que :

$$\left(\frac{\sin(dx)}{\sin(x)} \right)^2 = d + 2 \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \cos(2(p-q)x)$$

14. Justifier que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\sin(d \frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \right)^2 = (n-1)d + 2 \sum_{0 \leq q < p \leq d-1} \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2(p-q) \frac{k\pi}{n}\right)$$

15. En utilisant le résultat de la question préliminaire, établir finalement que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\sin(d \frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \right)^2 = nd - d^2$$