

Série MPSI - vrai DS n°0005

Mathématiques — Décembre 2022, Quelquepart.

Équations Différentielles, DLs de $\tan^{[n]}$ & Fonctions Hyperboliques (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : * * *

Exercice 1 — Équations différentielles & raccords

- Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.
 - Pour deux réels A et B , déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A \cos x + B \sin x$.
 - Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction $x \mapsto \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$ admette une limite finie en 0^+ . Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+ .
- On considère dans cette question l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \quad (E)$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

- Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} y(x)$$

Démontrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

- Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0.
- Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$ notée f telle que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$.

- Résoudre (E) sur $] -\infty, 0[$. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$? Si oui, expliciter ces solutions.

Exercice 2 — Développements limités des itérées de la tangente

Dans cet exercice, on pose la notation suivante : si f est une fonction, $f^{[1]} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}$.

Par exemple, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, etc.

- Justifier que $\tan$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{[n]}$ est de classe $\mathcal{C}^5$ au voisinage de 0. En déduire que $\tan^{[n]}$ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.
Justifier que ce développement limité est nécessairement de la forme :

$$\tan^{[n]}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o(x^5)$$

- Déterminer, en expliquant vos calculs, le développement limité de la fonction $\tan$ à l'ordre 5 en 0. Préciser les valeurs de a_1 , b_1 et c_1 .
- Calculer les valeurs de a_2 , b_2 et c_2 .

4. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer les expressions de a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} uniquement en fonction de a_n , b_n et c_n .
5. (a) Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$? En déduire l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Quelle est la nature de la suite $(b_n)_{n \geq 1}$? En déduire l'expression de b_n .
 (c) À l'aide du calcul de la somme $\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$, donner l'expression de c_n en fonction de n .
6. Préciser le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $x = 0$ de $\tan^{[5]}(x)$.
7. Déterminer la plus petite valeur de $n \geq 1$ pour laquelle la partie principale du développement limité de $\tan^{[n]}(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de $x = 0$ a tous ses coefficients entiers.

Problème — Étude de fonctions hyperboliques, intégrales & suites

Dans tout ce problème, on notera $\sinh$ la fonction sinus hyperbolique, $\cosh$ la fonction cosinus hyperbolique et $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ la fonction tangente hyperbolique.

Partie A — Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f .
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction $\sinh$ en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (b) Déterminer la limite de f en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \left[\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] \times \cosh\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\tanh(X) < X$.
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \mapsto \frac{\sinh(X)}{X}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F , puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie B — Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$xy' + y = \cosh x \quad (E)$$

9. Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E).
10. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $] -\infty, 0[$.
11. Justifier que la fonction F (définie à la question 8) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie C — Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \int_{x/2}^x f(t) dt$.

12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(2x) = 2 \cosh x \sinh x$.
13. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$J'(x) = f(x) \left[1 - \frac{1}{2} \cosh \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

14. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction $\ln$.
15. (a) À l'aide d'un encadrement de f , montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$.
(b) Montrer que J admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{x}{2}$ et montrer que la courbe représentative de J est toujours au-dessus de l'asymptote.
(c) Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.
16. Tracer l'allure de la courbe représentative de J .
On donne pour le tracé : $\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \approx 0,76$ et $J\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ à 10^{-2} près.

Partie D — Étude d'une suite implicite

À ne traiter que si vous avez traité le reste du devoir.

17. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, notée u_n .
18. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
19. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
20. En utilisant la question 7, déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.