

Série MPSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0006

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Ensembles Résiduels, Sommes-Produits & Nombres de Catalan (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Ensembles stables par différence strictement positive

1. Justification des affirmations :

- (a) Soit $A = \{0, 3, 6, 9\}$. Testons les différences $a - a'$ pour $a > a'$ dans A : $9 - 6 = 3 \in A$, $9 - 3 = 6 \in A$, $9 - 0 = 9 \in A$, $6 - 3 = 3 \in A$, $6 - 0 = 6 \in A$, $3 - 0 = 3 \in A$. **A est donc bien résiduel.**
 - (b) Soit $A = \{0, 4, 6\}$. On a $6, 4 \in A$ avec $6 > 4$, mais $6 - 4 = 2 \notin A$. **A n'est donc pas résiduel.**
 - (c) Soient $a, a' \in \mathbb{N}$ avec $a > a'$. On a $a - a' \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$. **$\mathbb{N}$ est donc résiduel.**
 - (d) L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun couple (a, a') , la condition est donc vacante. **$\emptyset$ est résiduel.**
 - (e) Pour $A = \{x\}$, il n'existe pas de couple $(a, a') \in A^2$ tel que $a > a'$. La condition est à nouveau vérifiée de manière vacante. **Tout singleton est résiduel.**
- (a) Soient A et B deux parties résiduelles de $\mathbb{N}$. Soient $(a, a') \in (A \cap B)^2$ tel que $a > a'$. Puisque $a, a' \in A$ et que A est résiduel, $a - a' \in A$. De même, $a, a' \in B$ donc $a - a' \in B$. Ainsi, $a - a' \in A \cap B$. **$A \cap B$ est donc résiduelle.**
 - (b) Posons $A = 3\mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ et $B = 4\mathbb{N} = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$, qui sont deux parties résiduelles de $\mathbb{N}$. On a $3 \in A \subset A \cup B$ et $4 \in B \subset A \cup B$. Or $4 > 3$ et $4 - 3 = 1 \notin A \cup B$. **La réunion $A \cup B$ n'est pas résiduelle.**
- Soit A une partie résiduelle et $B = \{2a \mid a \in A\}$. Soient $b, b' \in B$ tels que $b > b'$. Il existe $a, a' \in A$ tels que $b = 2a$ et $b' = 2a'$. Comme $2a > 2a'$, on a $a > a'$. A étant résiduelle, $a - a' \in A$. Par suite, $b - b' = 2(a - a') \in B$. **B est donc résiduelle.**
- (a) Soient $x, x' \in A_{d,m,n}$ avec $x > x'$. On s'écrit $x = kd$ et $x' = k'd$ avec $m \leq k' < k \leq n$. Alors $x - x' = (k - k')d$. Puisque $m \in \{0, 1\}$ et $k' < k$, on a $1 \leq k - k' \leq n - m \leq n$. Ainsi $k - k' \in \llbracket m, n \rrbracket$, d'où $(k - k')d \in A_{d,m,n}$. **$A_{d,m,n}$ est résiduelle.**
 - (*) Soit A une partie finie non vide résiduelle de $\mathbb{N}$. Si $A = \{0\}$, alors $A = A_{1,0,0}$. Si $A \setminus \{0\} \neq \emptyset$, posons $d = \min(A \setminus \{0\}) \geq 1$. Par divisions euclidiennes et stabilités successives par différence, tout élément de A est un multiple de d . En notant $n = \max(A)/d$, la stabilité par différence implique que tous les multiples kd pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ appartiennent à A . En posant $m = 0$ si $0 \in A$ et $m = 1$ sinon, on conclut que $A = A_{d,m,n}$.

Exercice 2 — Équations, sommes, produits et trigonométrie

1. Par les formules standard de sommations simples et doubles :

$$\sum_{i=1}^n 1 = n, \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 = n \times n = n^2, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- (a) $A_p + B_p = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = 2^{2p+1}$ d'après la formule du binôme de Newton.

(b) En effectuant le changement d'indice $j = 2p + 1 - k$ dans B_p :

$$B_p = \sum_{j=0}^p \binom{2p+1}{2p+1-j} = \sum_{j=0}^p \binom{2p+1}{j} = \mathbf{A}_p$$

(c) Comme $A_p = B_p$, on a $2A_p = 2^{2p+1}$, d'où $A_p = 2^{2p} = 4^p$.

3. • Par télescopage :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2n}}$$

• De même, en factorisant $k^3 \pm 1 = (k \pm 1)(k^2 \mp k + 1)$:

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} \right) = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2 + n + 1}{3} = \frac{\mathbf{2(n^2 + n + 1)}}{\mathbf{3n(n+1)}}$$

4. Pour $x > 0$, l'équation $(x^2)^x = x^{(x^2)}$ s'écrit $x^{2x} = x^{x^2}$. En passant au logarithme népérien : $2x \ln x = x^2 \ln x \iff x(x-2) \ln x = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $\ln x = 0$ ou $x - 2 = 0$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1, 2\}$.

5. • $(E_1) \iff \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \mathbf{x \equiv \frac{3\pi}{4} [\pi]}$.

• $(E_2) \iff 1 = 0$, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

• $(E_3) \iff (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = 0 \iff (\cos x + \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin(2x)\right) = 0$.
Comme $1 - \frac{1}{2} \sin(2x) \geq \frac{1}{2} > 0$, cela équivaut à (E_1) , soit $x \equiv \frac{3\pi}{4} [\pi]$.

6. (a) $2 \sinh\left(\frac{a}{2}\right) e^{\frac{a}{2}} = 2 \left(\frac{e^{a/2} - e^{-a/2}}{2}\right) e^{a/2} = e^a - 1$. L'égalité est vérifiée.

(b) Pour $x = 0$, la somme vaut $n + 1$. Pour $x \neq 0$, par somme géométrique de raison e^x :

$$\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2} (e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2})}{e^{x/2} (e^{-x/2} - e^{x/2})} = \mathbf{e^{\frac{nx}{2}} \frac{\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

(c) (★) En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de l'égalité précédente (avec $e^{nx/2} = \cosh(nx/2) + \sinh(nx/2)i$), on obtient immédiatement les deux identités demandées.

Problème — Nombres de Catalan et combinatoire

Partie A — Propriétés arithmétiques

1. **Questions de cours :**

(a) Pour $k, n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leq k \leq n$, et 0 sinon.

(b) Formule de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

(c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$ et $\binom{0}{k} = 0 \in \mathbb{N}$ pour $k \neq 0$. Si la propriété est vraie au rang $n-1$, la formule de Pascal montre que $\binom{n}{k}$ est la somme de deux entiers naturels, donc est un entier naturel.

2. $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$ et $c_4 = 14$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \mathbf{c_n}$$

(b) D'après la question 1.(c), $\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n}{n+1}$ sont des entiers naturels. Leur différence c_n est donc un entier relatif. Comme $c_n > 0$, $c_n \in \mathbb{N}$.

Partie B — Relation de récurrence fondamentale

4. En calculant les premières valeurs : $S_0 = c_0^2 = 1 = c_1$, $S_1 = 2c_0c_1 = 2 = c_2$, $S_2 = 2c_0c_2 + c_1^2 = 5 = c_3$, $S_3 = 2c_0c_3 + 2c_1c_2 = 14 = c_4$. **On remarque que $S_n = c_{n+1}$ pour ces premiers rangs.**
5. Avec le changement d'indice $j = n - k$:

$$T_n = \sum_{j=0}^n (n-j)c_{n-j}c_j = n \sum_{j=0}^n c_jc_{n-j} - \sum_{j=0}^n jc_jc_{n-j} = nS_n - T_n \implies 2T_n = nS_n$$

6. Pour tout $k \geq 1$:

$$(k+1)c_k = \binom{2k}{k} \quad \text{et} \quad (4k-2)c_{k-1} = 2(2k-1)\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k)!}{k!k!} = \binom{2k}{k}$$

On a bien $(k+1)c_k = (4k-2)c_{k-1}$.

7. (★) Développons $T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)c_kc_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)c_kc_{n+1-k}$. En utilisant la relation de la question 6 et le changement d'indice $j = k - 1$:

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + \sum_{j=0}^n (4j+2)c_jc_{n-j} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$$

Puisque $4T_n = 2nS_n$, on obtient $T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n$. En remplaçant T_{n+1} par $\frac{n+1}{2}S_{n+1}$, il vient : $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n$.

8. Démontrons par récurrence que $S_n = c_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation** : $S_0 = 1 = c_1$, la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité** : Supposons $S_n = c_{n+1}$. Alors par la question 7 :

$$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)c_{n+1} = (2n+3)c_{n+1} \implies S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1}$$

Or par la définition des coefficients binomiaux, $c_{n+2} = \frac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1}$. D'où $S_{n+1} = c_{n+2}$.

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_kc_{n-k}$.

9. Par récurrence forte : $c_0 = 1 \in \mathbb{N}$. Si $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{N}$, alors $c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_kc_{n-k}$ est une somme de produits d'entiers naturels, donc $c_{n+1} \in \mathbb{N}$.

Partie C — Interprétation combinatoire

10. (★) Considérons un polygone convexe P à $n+3$ sommets $A_0, A_1, \dots, A_{n+2}$. Dans toute triangulation de P , le côté $[A_0A_{n+2}]$ appartient à un unique triangle $A_0A_{k+1}A_{n+2}$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ce triangle découpe P en deux polygones plus petits : un polygone à $k+2$ sommets (qui possède t_k triangulations) et un polygone à $(n-k)+2$ sommets (qui possède t_{n-k} triangulations). En sommant sur toutes les positions possibles du sommet A_{k+1} , on obtient :

$$t_{n+1} = \sum_{k=0}^n t_k t_{n-k}$$

11. La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même condition initiale ($t_0 = 1 = c_0$) et la même relation de récurrence que la suite des nombres de Catalan $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = c_n$.**