

Série MPSI - vrai DS n°0006

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Ensembles Résiduels, Sommes-Produits & Nombres de Catalan (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : ***

Exercice 1 — Ensembles stables par différence strictement positive

Une partie $A \subset \mathbb{N}$ est dite **stable par différence strictement positive** - nous dirons *résiduelle* - si :

$$\forall (a, a') \in A^2, \quad a > a' \implies a - a' \in A$$

- Justifier les affirmations ci-dessous :
 - $\{0, 3, 6, 9\}$ est résiduel.
 - $\{0, 4, 6\}$ n'est pas résiduel.
 - $\mathbb{N}$ est résiduel.
 - L'ensemble vide $\emptyset$ est résiduel.
 - Tout singleton $\{x\}$ avec $x \in \mathbb{N}$ est résiduel.
- Démontrer que l'intersection de deux parties résiduelles de $\mathbb{N}$ est résiduelle.
 - Exhiber deux parties résiduelles de $\mathbb{N}$ dont la réunion n'est pas résiduelle.
- Soit A une partie résiduelle de $\mathbb{N}$. On pose $B = \{2a \mid a \in A\}$. Montrer que B est résiduelle.
- Pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$, on définit $A_{d,m,n} = \{kd \mid k \in \llbracket m, n \rrbracket\}$.
 - Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $m \in \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $m < n$. Démontrer que $A_{d,m,n}$ est résiduelle.
 - (*) Démontrer que si A est une partie finie non vide et résiduelle de $\mathbb{N}$, il existe $d \geq 1$, $m \in \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$ tels que $A = A_{d,m,n}$.

Exercice 2 — Équations, sommes, produits et trigonométrie

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les trois sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^n 1, \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $A_p = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k}$ et $B_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

- Calculer $A_p + B_p$.
- Démontrer que $A_p = B_p$.
- En déduire la valeur de A_p .

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geq 2$). Calculer les deux produits suivants :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$$

- Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $(x^2)^x = x^{(x^2)}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations trigonométriques suivantes :

$$(E_1) : \cos x + \sin x = 0, \quad (E_2) : \cos^2 x + \sin^2 x = 0, \quad (E_3) : \cos^3 x + \sin^3 x = 0$$

6. (a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, vérifier l'égalité : $e^a - 1 = 2 \sinh\left(\frac{a}{2}\right) e^{\frac{a}{2}}$.
- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^n e^{kx}$.
- (c) (★) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cosh\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sinh(kx) = \frac{\sinh\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sinh\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Problème — Nombres de Catalan et combinatoire

On s'intéresse à la suite des **nombres de Catalan** $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Partie A — Propriétés arithmétiques

1. Questions de cours :

- (a) Rappeler, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
- (b) Rappeler la formule de Pascal.
- (c) Démontrer par récurrence sur n que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.
2. Calculer c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 .
3. (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n est un entier naturel.

Partie B — Relation de récurrence fondamentale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$$

4. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3 . Que remarque-t-on ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un changement d'indice, démontrer que $T_n = \sum_{k=0}^n (n-k) c_k c_{n-k}$. En déduire que $2T_n = nS_n$.
6. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(k+1)c_k = (4k-2)c_{k-1}$$

7. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les questions précédentes, montrer successivement que :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n \quad \text{puis que} \quad \frac{n+3}{2} S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

8. Démontrer par récurrence que la suite des nombres de Catalan vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

9. En raisonnant par récurrence forte et en utilisant le résultat précédent, retrouver le fait que $c_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C — Interprétation combinatoire

Pour $n \geq 1$, on note t_n le nombre de façons de découper un polygone convexe à $n + 2$ côtés en triangles (triangulations). Par convention, on pose $t_0 = 1$.

10. (★) Démontrer que pour tout $n \geq 0$:

$$t_{n+1} = \sum_{k=0}^n t_k t_{n-k}$$

11. Démontrer que pour tout entier naturel n , $t_n = c_n$.