

Série MPSI — CORRIGÉ : vrai DS n°0007

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Systèmes linéaires, Sommes, Étude de fonction & Formule du binôme (2h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Deux systèmes linéaires

1. On considère le système paramétrique $(S_1) : \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 & (L_1) \\ mx + (m+4)y = m^2 + 4 & (L_2) \end{cases}$

Effectuons l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$:

$$(m+4-m(m+1))y = m^2+4-m(m+2) \iff (4-m^2)y = 4-2m \iff (2-m)(2+m)y = 2(2-m)$$

- **Cas $m = 2$:** L'équation devient $0 \cdot y = 0$, vérifiée pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$L_1 \text{ donne } x + 3y = 4 \iff x = 4 - 3y.$$

L'ensemble des solutions est une droite : $\mathcal{S} = \{(4 - 3\mathbf{y}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}\}$.

- **Cas $m = -2$:** L'équation devient $0 \cdot y = 8$, ce qui est impossible.

L'ensemble des solutions est vide : $\mathcal{S} = \emptyset$.

- **Cas $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$:** On peut diviser par $(2-m)(2+m) \neq 0$:

$$y = \frac{2(2-m)}{(2-m)(2+m)} = \frac{2}{m+2}$$

En réinjectant dans L_1 :

$$x = m+2 - (m+1)\frac{2}{m+2} = \frac{(m+2)^2 - 2(m+1)}{m+2} = \frac{m^2 + 2m + 2}{m+2}$$

Le système admet une unique solution : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{m^2 + 2m + 2}{m+2}, \frac{2}{m+2} \right) \right\}$.

2. On considère le système $(S_2) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 & (L_1) \\ 3x - y - 2z = 0 & (L_2) \\ x + y - z = -2 & (L_3) \\ x + 2y + z = 1 & (L_4) \end{cases}$

D'après L_3 , $x = -2 - y + z$. Réinjectons x dans les trois autres équations :

$$\begin{cases} 2(-2 - y + z) + y + z = 3 \\ 3(-2 - y + z) - y - 2z = 0 \\ (-2 - y + z) + 2y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -y + 3z = 7 & (L'_1) \\ -4y + z = 6 & (L'_2) \\ y + 2z = 3 & (L'_4) \end{cases}$$

De L'_2 , $z = 4y + 6$. Substituons dans L'_1 :

$$-y + 3(4y + 6) = 7 \iff 11y + 18 = 7 \iff 11y = -11 \iff \mathbf{y} = -1$$

On en déduit $z = 4(-1) + 6 = 2$, puis $x = -2 - (-1) + 2 = 1$.

Vérifions si le triplet $(1, -1, 2)$ satisfait la dernière équation L'_4 :

$$y + 2z = -1 + 2(2) = 3 \quad (\text{vérifié!})$$

Le système est compatible et admet pour unique solution $\mathcal{S} = \{(1, -1, 2)\}$.

Exercice 2 — Des sommes

1. (a) $S = \sum_{k=2}^n \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k.$

Par la formule d'une somme géométrique de raison $\frac{2}{3} \neq 1$:

$$S = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1 - (2/3)^{n-1}}{1 - 2/3} = \frac{4}{27} \times 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{4}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

(b) Par la formule du binôme de Newton :

$$T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

(c) En développant : $U = \sum_{p=1}^n (p^2 - 4p) = \sum_{p=1}^n p^2 - 4 \sum_{p=1}^n p.$

$$U = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} ((2n+1) - 12) = \frac{n(n+1)(2n-11)}{6}$$

(d) Par les propriétés du logarithme et télescopage :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{j+2}{j}\right) = \sum_{j=1}^n (\ln(j+2) - \ln(j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \ln(j+2) - \sum_{j=1}^n \ln(j) = \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - \sum_{j=1}^n \ln(j) \\ &= \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 3 — Une étude de fonction

1. $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est définie si et seulement si $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ et $x+1 \neq 0$.

Un tableau de signe donne que $\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$

Ainsi, $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$

2. Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \rightarrow 1$.

Effectuons un développement limité au voisinage de $\pm\infty$:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Multiplions par x : $f(x) = x - 1 + o(1)$.

La droite d'équation $y = x - 1$ est donc asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Position relative : $f(x) - (x-1) \sim -\frac{1}{x}$.

- En $+\infty$, $f(x) - (x-1) < 0$: la courbe est **en dessous** de l'asymptote.
- En $-\infty$, $f(x) - (x-1) > 0$: la courbe est **au-dessus** de l'asymptote.

3. Lorsque $x \rightarrow -1^-$, $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow +\infty \implies \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow +\infty$.

Comme $x \rightarrow -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.

La droite verticale d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

4. Sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, f est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x+1}(x+1)^2 + x}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 1}{(\mathbf{x} + 1)^2 \sqrt{\frac{\mathbf{x}-1}{\mathbf{x}+1}}} \end{aligned}$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ dépend du trinôme $x^2 + x - 1$.

$\Delta = 5$, les racines sont $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618 \in] -\infty, -1[$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618 \notin \mathcal{D}_f$.

- Sur $] -\infty, x_1]$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante jusqu'au maximum $f(x_1) \approx -2,96$.
- Sur $[x_1, -1[$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante vers $-\infty$.
- Sur $]1, +\infty[$, $x^2 + x - 1 > 0$, donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante de 0 à $+\infty$.

5. Étude du taux d'accroissement en 1^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente verticale de pente $+\infty$ ** au point $(1, 0)$.

Problème — Autour de la formule du binôme de Newton

Partie I — Les cas $p = 0$ et $p = 1$

1. (a) Pour $p = 0$ et $n \geq 1$, $S_{n,0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 1^{n-k}$.

D'après la formule du binôme de Newton :

$$S_{n,0} = (-1 + 1)^n = 0^n = \mathbf{0} \quad (\text{car } n \geq 1)$$

(b) Pour $n = 0$ et $p = 0$, $S_{0,0} = (-1)^0 \binom{0}{0} 0^0 = 1 \times 1 \times 1 = \mathbf{1}$.

2. (a) $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k 1^{n-k} = (\mathbf{1} - \mathbf{x})^{\mathbf{n}}$ d'après le binôme de Newton.

(b) • En dérivant la forme factorisée : $f'(x) = -\mathbf{n}(\mathbf{1} - \mathbf{x})^{\mathbf{n}-1}$.

• En dérivant terme à terme la forme développée :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

(c) Évaluons $f'(1)$ avec les deux expressions :

• Si $n = 1$, $f'(1) = -1(0)^0 = -1$.

D'autre part, $f'(1) = \sum_{k=1}^1 (-1)^k \binom{1}{k} k (1)^{k-1} = (-1)^1 \binom{1}{1} (1) = S_{1,1}$.

D'où $\mathbf{S}_{1,1} = -\mathbf{1}$.

• Si $n \geq 2$, $f'(1) = -n(0)^{n-1} = 0$.

D'autre part, $f'(1) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k = S_{n,1}$.

D'où $\forall \mathbf{n} \geq 2, \quad \mathbf{S}_{\mathbf{n},1} = \mathbf{0}$.

Partie II — Étude du cas général

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \mathbf{n} \binom{\mathbf{n}-1}{\mathbf{k}-1}$$

4. Il s'agit de la relation de Pascal appliquée à $n - 1$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

5. Calculons $n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$:

$$\begin{aligned} n(S_{n,p} - S_{n-1,p}) &= n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p - n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^p \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k^p \left(n \binom{n}{k} - n \binom{n-1}{k} \right) \end{aligned}$$

Or, d'après la question 4, $n \binom{n-1}{k} = n \binom{n}{k} - n \binom{n-1}{k-1}$.

Et d'après la question 3, $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$.

Donc $n \binom{n}{k} - n \binom{n-1}{k} = k \binom{n}{k}$. On en déduit :

$$n(S_{n,p} - S_{n-1,p}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k k^p \left(k \binom{n}{k} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{p+1} = \mathbf{S_{n,p+1}}$$

6. Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{H}(p)$: « $\forall n > p, S_{n,p} = 0$ ».

- *Initialisation* : Pour $p = 0$, d'après la question 1.a, $\forall n > 0, S_{n,0} = 0$. $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie, c'est-à-dire $\forall n > p, S_{n,p} = 0$.

Soit $n > p + 1$. Alors $n > p$ et $n - 1 > p$.

Par hypothèse de récurrence, $S_{n,p} = 0$ et $S_{n-1,p} = 0$.

En utilisant la relation établie à la question 5 :

$$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p}) = n(0 - 0) = 0$$

La propriété est vérifiée pour $p + 1$.

Par récurrence, on a bien $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > p, S_{n,p} = 0$.