

Série MPSI — vrai DS n°0007

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Systèmes linéaires, Sommes, Étude de fonction & Formule du binôme (2h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★○○

Abstraction & Raisonnement : ★○○

Exercice 1 — Deux systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants (on discutera du nombre de solutions selon les valeurs de m dans le premier cas) :

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} x + (m+1)y &= m+2 \\ mx + (m+4)y &= m^2+4 \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= -2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2 — Des sommes

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad S &= \sum_{k=2}^n \frac{2^k}{3^{k+1}} & \text{(b)} \quad T &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ \text{(c)} \quad U &= \sum_{p=1}^n p(p-4) & \text{(d)} \quad V &= \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{j} \right) \end{aligned}$$

Pour la somme U , on conclura par une forme factorisée.

Exercice 3 — Une étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
 2. Étudier les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.
 3. Étudier les autres branches infinies éventuelles de f .
 4. Dresser le tableau de variation de f .
 5. Tracer le graphe de la fonction f . On précisera, après étude, la pente de la tangente au point d'abscisse 1.
-

Problème — Autour de la formule du binôme de Newton

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de l'exercice est de calculer certaines sommes $S_{n,p}$.

On rappelle que, pour tout nombre réel x , on a $x^0 = 1$. En particulier, $0^0 = 1$.

Partie I — Les cas $p = 0$ et $p = 1$

1. On se place dans cette question dans le cas où $p = 0$.
 - (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{n,0} = 0$.
Une récurrence n'est pas attendue ici.
 - (b) Que vaut la somme $S_{0,0}$?
2. On se place ici dans le cas où $p = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$

- (a) Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1-x)^n$$

- (b) Donner deux expressions différentes de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
- (c) En déduire que $S_{1,1} = -1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $S_{n,1} = 0$.

Partie II — Étude du cas général

Dans cette partie, on se donne des entiers naturels n et p tels que $n > p$.

3. Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

4. Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

On remarquera que les deux formules établies restent valables si $k = 0$.

5. Dédurre des deux questions précédentes l'égalité :

$$S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$$

6. En raisonnant par récurrence sur l'entier p , montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > p, \quad S_{n,p} = 0$$