

Série MPSI — CORRIGÉ : vrai DS n°0008

Mathématiques — Octobre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Sommes doubles, Suites, Arithmétique & Nombres complexes (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Un encadrement pour une somme double

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{i+j}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous entiers $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'encadrement :

$$2 \leq i + j \leq 2n \iff \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{i+j} \leq \frac{1}{2}$$

La somme S_n comporte $n \times n = n^2$ termes. En sommant ces inégalités sur $1 \leq i, j \leq n$:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2n} \leq S_n \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2} \iff \frac{n^2}{2n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{2}$$

On obtient bien :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\mathbf{n}}{2} \leq \mathbf{S}_{\mathbf{n}} \leq \frac{\mathbf{n}^2}{2}$$

2. (a) Posons $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$ sur $] -1, +\infty[$. La fonction φ est dérivable et :

$$\forall x > -1, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

φ' est strictement positive sur $] -1, 0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $]0, +\infty[$.

La fonction φ admet donc un maximum global strict en 0, valant $\varphi(0) = 0$. Ainsi :

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$$

Soit $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$:

- En appliquant cette inégalité à $x = \frac{1}{k} > 0 > -1$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \iff \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \iff \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

- En appliquant cette inégalité à $x = -\frac{1}{k} > -1$ (car $k \geq 2$) :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &\leq -\frac{1}{k} \iff \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \leq -\frac{1}{k} \iff \ln(k-1) - \ln(k) \leq -\frac{1}{k} \\ &\iff \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) \end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, on a bien :

$$\forall \mathbf{k} \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad \ln(\mathbf{k}+1) - \ln(\mathbf{k}) \leq \frac{1}{\mathbf{k}} \leq \ln(\mathbf{k}) - \ln(\mathbf{k}-1)$$

- (b) Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $b \geq a \geq 2$. Sommons l'encadrement précédent pour k variant de a à b :

$$\sum_{k=a}^b (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=a}^b \frac{1}{k} \leq \sum_{k=a}^b (\ln(k) - \ln(k-1))$$

Par télescopage direct à gauche et à droite, il vient :

$$\ln(\mathbf{b}+1) - \ln(\mathbf{a}) \leq \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{1}{\mathbf{k}} \leq \ln(\mathbf{b}) - \ln(\mathbf{a}-1)$$

3. Soit $n \geq 2$.

(a) Écrivons la somme sous forme d'une somme itérée : $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j} \right)$.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, effectuons le changement d'indice $k = i + j$. Lorsque j varie de 1 à n , k varie de $i + 1$ à $i + n$.

Puisque $i \geq 1$, on a $i + 1 \geq 2$. On peut donc appliquer la majoration de la question 2.(b) avec $a = i + 1$ et $b = i + n$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j} = \sum_{k=i+1}^{i+n} \frac{1}{k} \leq \ln(i+n) - \ln((i+1)-1) = \ln(i+n) - \ln(i) = \ln\left(\frac{i+n}{i}\right) = \ln\left(1 + \frac{n}{i}\right)$$

En sommant cette inégalité pour i allant de 1 à n , on obtient :

$$S_n \leq \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{n}{i}\right)$$

(b) D'après l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ appliquée à $x = \frac{n}{i} > 0$:

$$S_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = n \left(1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right)$$

D'après la question 2.(b) appliquée avec $a = 2$ et $b = n$:

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \ln(n) - \ln(2-1) = \ln(n)$$

On en déduit :

$$S_n \leq n(\ln(n) + 1)$$

4. Soit $n \geq 1$.

(a) Isolons les termes d'indices $i = n + 1$ et $j = n + 1$ dans l'expression de S_{n+1} :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{i+j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+(n+1)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{(n+1)+j} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ &= S_n + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

Par translation d'indice $m = n + 1 + k$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+k} = \sum_{m=n+2}^{2n+1} \frac{1}{m}$.

Remarquons alors que $\frac{1}{2n+2} \leq \frac{2}{2n+2} = 2 \times \frac{1}{2n+2}$. Par conséquent :

$$S_{n+1} - S_n = 2 \sum_{m=n+2}^{2n+1} \frac{1}{m} + \frac{1}{2n+2} \leq 2 \sum_{m=n+2}^{2n+1} \frac{1}{m} + 2 \frac{1}{2n+2} = 2 \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}$$

(b) Appliquons la majoration de la question 2.(b) à la somme $\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}$ avec $a = n + 2$ et $b = 2n + 2$:

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \leq \ln(2n+2) - \ln((n+2)-1) = \ln(2(n+1)) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2(n+1)}{n+1}\right) = \ln(2)$$

On en déduit que pour tout $k \geq 1$:

$$S_{k+1} - S_k \leq 2 \ln(2) = \ln(4)$$

Par sommation télescopique pour k variant de 1 à $n-1$:

$$S_n - S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) \leq (n-1) \ln(4) \implies S_n \leq S_1 + (n-1) \ln(4)$$

Or $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, et comme $\ln(4) = 2 \ln(2) \approx 1,386 \geq \frac{1}{2}$, on a $S_1 \leq \ln(4)$. Ainsi :

$$S_n \leq \ln(4) + (n-1) \ln(4) = \ln(4)n$$

(Ce résultat reste évidemment vrai pour $n=1$ puisque $\frac{1}{2} \leq \ln(4)$).

Exercice 2 — Binôme de Newton & Équation de Pell-Fermat

1. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{5})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{5})^k (1 + (-1)^k)$$

Pour tout k impair, $1 + (-1)^k = 0$. Pour $k = 2p$ pair, $1 + (-1)^k = 2$ et $(\sqrt{5})^{2p} = 5^p$. Donc :

$$(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 5^p$$

La somme $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 5^p$ est une somme de produits d'entiers naturels, c'est donc un entier $M \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre $(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n = 2M$ est donc bien un **entier pair**.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En développant par le binôme de Newton :

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{k/2} + \sqrt{2} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{(k-1)/2}$$

Posons :

$$a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p \in \mathbb{N}$$

On a alors $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$. De même :

$$(1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{2})^k = a_n - b_n \sqrt{2}$$

Le couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ vérifie bien les deux égalités simultanément.

(b) En multipliant membre à membre les deux expressions :

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n + b_n \sqrt{2})(a_n - b_n \sqrt{2}) = ((1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}))^n = (1 - 2)^n = (-1)^n$$

Remarquons que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2} = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{2b_n^2}$.

• **Si n est pair** : $(-1)^n = 1$, donc $a_n^2 - 2b_n^2 = 1 \iff a_n^2 = 2b_n^2 + 1$.

Il vient $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{2b_n^2} + \sqrt{2b_n^2 + 1}$. On pose $\alpha_n = 2b_n^2 \in \mathbb{N}^*$ (car $n \geq 1 \implies b_n \geq 1$).

• **Si n est impair** : $(-1)^n = -1$, donc $a_n^2 - 2b_n^2 = -1 \iff 2b_n^2 = a_n^2 + 1$.

Il vient $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{a_n^2 + 1}$. On pose $\alpha_n = a_n^2 \in \mathbb{N}^*$ (car $a_n \geq 1$).

Dans les deux cas, il existe bien $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$.

3. (a) Par la formule du binôme :

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k$$

En séparant termes pairs et impairs comme précédemment :

$$a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 3^{n-2p} 8^p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 3^{n-(2p+1)} 2 \cdot 8^p \in \mathbb{N}$$

On a ainsi $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Par symétrie du signe, on a directement :

$$(3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

(b) En effectuant le produit membre à membre :

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = ((3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}))^n = (9 - 8)^n = 1^n = 1$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple (a_n, b_n) est solution dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Comme $3 + 2\sqrt{2} > 1$, la suite $(a_n + b_n\sqrt{2})_{n \geq 0}$ est strictement croissante, ce qui garantit que les couples $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tous deux à deux distincts.

Il existe donc une ** infinité de couples d'entiers naturels (x, y) vérifiant $x^2 - 2y^2 = 1^{**}$.

Exercice 3 — Arithmétique dans l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$

On note α une racine complexe de $z^2 + z + 2 = 0$ et $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Soient $z_1 = a + b\alpha$ et $z_2 = c + d\alpha$ deux éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

• **Stabilité par addition :** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\alpha$.

Comme $a + c \in \mathbb{Z}$ et $b + d \in \mathbb{Z}$, on a bien $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

• **Stabilité par produit :** $z_1 z_2 = ac + (ad + bc)\alpha + bd\alpha^2$.

Puisque $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$, on a $\alpha^2 = -\alpha - 2$. En substituant :

$$z_1 z_2 = ac + (ad + bc)\alpha + bd(-\alpha - 2) = (ac - 2bd) + (ad + bc - bd)\alpha$$

Comme $(ac - 2bd) \in \mathbb{Z}$ et $(ad + bc - bd) \in \mathbb{Z}$, on a bien $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

2. L'équation $z^2 + z + 2 = 0$ est à coefficients réels et son discriminant vaut $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.

Les racines sont complexes non réelles conjuguées, donc $\bar{\alpha}$ est également racine.

D'après les relations coefficients-racines :

$$\alpha + \bar{\alpha} = -1 \implies \bar{\alpha} = -1 - \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 2$$

• Soit $z = a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Alors :

$$\bar{z} = a + b\bar{\alpha} = a + b(-1 - \alpha) = (a - b) - b\alpha$$

Comme $a - b \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, on a $\bar{z} \in \mathbb{Z}[\alpha]$. L'ensemble est stable par conjugaison.

• Pour la norme $N(z) = |z|^2 = z\bar{z}$:

$$N(z) = (a + b\alpha)(a + b\bar{\alpha}) = a^2 + ab(\alpha + \bar{\alpha}) + b^2\alpha\bar{\alpha} = a^2 - ab + 2b^2$$

Comme $a, b \in \mathbb{Z}$, $N(z)$ est un entier relatif. De plus, $N(z) = |z|^2 \geq 0$, donc $\mathbf{N}(\mathbb{Z}[\alpha]) \subset \mathbb{N}$.

Enfin, tout entier $k \in \mathbb{N}$ s'écrit $k + 0\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$, donc $\mathbb{Z}[\alpha]$ est bien stable par N .

3. Soit $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

- **Sens direct** ($\implies$) : Supposons $z \in (\mathbb{Z}[\alpha])^*$.

Il existe $z' \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $zz' = 1$. En appliquant le morphisme de norme :

$$N(zz') = N(1) \iff |zz'|^2 = 1 \iff N(z)N(z') = 1$$

Puisque $N(z) \in \mathbb{N}$ et $N(z') \in \mathbb{N}$, la seule factorisation possible dans $\mathbb{N}$ est $\mathbf{N}(\mathbf{z}) = \mathbf{1}$.

- **Sens réciproque** ($\impliedby$) : Supposons $N(z) = 1$.

Alors $z\bar{z} = 1 \iff z^{-1} = \bar{z}$.

D'après la question 2, $\bar{z} \in \mathbb{Z}[\alpha]$, donc $z^{-1} \in \mathbb{Z}[\alpha]$, ce qui prouve que $\mathbf{z} \in (\mathbb{Z}[\alpha])^*$.

4. D'après la question 3, $z = a + b\alpha$ est inversible si et seulement si :

$$a^2 - ab + 2b^2 = 1 \iff 4a^2 - 4ab + 8b^2 = 4 \iff (2a - b)^2 + 7b^2 = 4$$

Comme a et b sont des entiers, $(2a - b)^2 \geq 0$ et $7b^2 \geq 0$.

- Si $|b| \geq 1$, alors $7b^2 \geq 7 > 4$, ce qui est impossible.
- On a donc nécessairement $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

L'équation devient alors $(2a)^2 = 4 \iff 4a^2 = 4 \iff a^2 = 1 \iff \mathbf{a} = \pm \mathbf{1}$.

Réciproquement, les éléments 1 et -1 appartiennent bien à $\mathbb{Z}[\alpha]$ et vérifient $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.

L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est donc :

$$(\mathbb{Z}[\alpha])^* = \{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$$