

Exercice 1 — Un encadrement pour une somme double

Dans cet exercice, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{i+j}$$

1. En encadrant les quantités $\frac{1}{i+j}$ entre la plus petite et la plus grande valeur possible atteintes dans la somme S_n , montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{2} \leq S_n \leq \frac{n^2}{2}$$

Le but de cet exercice est d'améliorer cette majoration, sans calculer exactement S_n .

2. (a) Justifier que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ puis montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $b \geq a \geq 2$. Montrer :

$$\ln(b+1) - \ln(a) \leq \sum_{k=a}^b \frac{1}{k} \leq \ln(b) - \ln(a-1)$$

3. Soit $n \geq 2$.

- (a) En utilisant le changement de variable $k = i + j$, montrer :

$$S_n \leq \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{n}{i}\right)$$

- (b) En déduire :

$$S_n \leq n(\ln(n) + 1)$$

4. Soit $n \geq 1$.

- (a) Montrer que :

$$S_{n+1} - S_n \leq 2 \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}$$

- (b) En déduire que :

$$S_n \leq \ln(4)n$$

Exercice 2

1. Montrer que $(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On souhaite montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$.

(a) Montrer que :

$$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, \quad (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \text{ET} \quad (1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

(b) En déduire que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ et conclure.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers naturels a_n et b_n tels que :

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Que dire de $(3 - 2\sqrt{2})^n$?

(b) En déduire qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 3

On note α une racine complexe de l'équation $z^2 + z + 2 = 0$ qu'on ne cherchera pas à calculer, et on considère l'ensemble :

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

On dit que $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ non nul est un inversible de $\mathbb{Z}[\alpha]$ si $z^{-1} \in \mathbb{Z}[\alpha]$. On note $(\mathbb{Z}[\alpha])^*$ l'ensemble de ces éléments.

1. Justifier que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est stable par addition et par produit (i.e. que la somme et le produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est aussi dans $\mathbb{Z}[\alpha]$).
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est stable par $z \mapsto \bar{z}$ et par $N : z \mapsto |z|^2$ (i.e. que le conjugué et le carré du module d'un élément de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est aussi dans $\mathbb{Z}[\alpha]$) et que $N(\mathbb{Z}[\alpha]) \subset \mathbb{N}$.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Montrer que $z \in (\mathbb{Z}[\alpha])^*$ si et seulement si $N(z) = 1$.
4. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.