

Série PCSI / PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0001

Mathématiques — Septembre 2026, Correction by Maths ingé

Analyse, Logique, Équations et Fonctions affines (2h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1

L'assertion de départ est : $(A_1) : \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair}) \implies (n \text{ est un multiple de } 6)$.

1. **Négation** (A_2) : La négation de $P \implies Q$ est $P \wedge \neg Q$.

$$(A_2) \quad \exists n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair}) \text{ et } (n \text{ n'est pas un multiple de } 6)$$

2. **Réciproque** (A_3) : La réciproque de $P \implies Q$ est $Q \implies P$.

$$(A_3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est un multiple de } 6) \implies (n \text{ est pair})$$

3. **Contraposée** (A_4) : La contraposée de $P \implies Q$ est $\neg Q \implies \neg P$.

$$(A_4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ n'est pas un multiple de } 6) \implies (n \text{ n'est pas pair})$$

4. **Valeurs de vérité et justifications** :

- (A_1) est **FAUSSE**. Contre-exemple : pour $n = 2 \in \mathbb{N}$, 2 est pair mais 2 n'est pas un multiple de 6.
- (A_2) est **VRAIE** car c'est la négation de l'assertion (A_1) qui est fausse (exhibée par le contre-exemple $n = 2$).
- (A_3) est **VRAIE**. En effet, si n est un multiple de 6, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k = 2(3k)$. Comme $3k \in \mathbb{N}$, n est bien pair.
- (A_4) est **FAUSSE** car elle est logiquement équivalente à (A_1) (qui est fausse).

Exercice 2

5. Résolution de $|5x + 10| = |8x + 4|$:

$$|5x + 10| = |8x + 4| \iff 5x + 10 = 8x + 4 \text{ ou } 5x + 10 = -(8x + 4)$$

- Premier cas : $5x + 10 = 8x + 4 \iff 3x = 6 \iff x = 2$.
- Second cas : $5x + 10 = -8x - 4 \iff 13x = -14 \iff x = -\frac{14}{13}$.

$$\text{Conclusion : } S = \left\{ -\frac{14}{13}, 2 \right\}.$$

6. Résolution de $\sqrt{-x^2 + x + 3} \leq 2x + 1$:

- **Ensemble de définition** : L'expression sous la racine doit être positive ou nulle.
 $\Delta = 1^2 - 4(-1)(3) = 13 > 0$. Les racines de $-x^2 + x + 3$ sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1,3$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2,3$.
La quantité est positive à l'intérieur des racines : $D = \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right]$.

- **Condition de positivité du membre de droite :** Pour qu'une racine soit inférieure ou égale à $2x + 1$, il faut impérativement que $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$.

Comme $-\frac{1}{2} \geq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, l'étude se restreint au domaine $D' = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

- **Élévation au carré :** Pour $x \in D'$, les deux membres sont positifs, l'inéquation est équivalente à :

$$-x^2 + x + 3 \leq (2x + 1)^2 \iff -x^2 + x + 3 \leq 4x^2 + 4x + 1 \iff 5x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

Le trinôme $5x^2 + 3x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 4(5)(-2) = 49 = 7^2$.

Ses racines sont $r_1 = \frac{-3-7}{10} = -1$ et $r_2 = \frac{-3+7}{10} = \frac{2}{5}$.

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines : $x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{2}{5}, +\infty[$.

En croisant avec le domaine $D' = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$, on obtient :

Conclusion : $S = \left[\frac{2}{5}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

7. Résolution de $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \geq 1$:

- **Ensemble de définition :** $x + 5 \geq 0 \iff x \geq -5$ et $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$.

Le domaine d'étude est $D = [3, +\infty[$.

- **Isolons la racine :** Pour $x \in D$, l'inéquation s'écrit $\sqrt{x+5} \geq 1 + \sqrt{x-3}$.

- **Élévation au carré :** Les deux membres étant strictement positifs, on a par équivalence :

$$x + 5 \geq (1 + \sqrt{x-3})^2 \iff x + 5 \geq 1 + 2\sqrt{x-3} + x - 3 \iff 7 \geq 2\sqrt{x-3} \iff \sqrt{x-3} \leq \frac{7}{2}$$

Les deux membres étant à nouveau positifs :

$$x - 3 \leq \frac{49}{4} \iff x \leq \frac{49}{4} + 3 = \frac{61}{4}$$

En croisant avec le domaine $D = [3, +\infty[$:

Conclusion : $S = \left[3, \frac{61}{4}\right]$.

Exercice 3

8. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

- **Initialisation ($n = 1$) :**

Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} = 1$, et le membre de droite vaut $2 - \frac{1}{1} = 1$.
Comme $1 \leq 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $n \geq 1$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

En ajoutant $\frac{1}{(n+1)^2}$ aux deux membres :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Pour établir $\mathcal{P}(n+1)$, il suffit de montrer que :

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Comme $n < n + 1$, en multipliant par $n + 1 > 0$, on a bien $n(n + 1) < (n + 1)^2$.

En passant à l'inverse, l'inégalité $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ est strictement vraie pour tout $n \geq 1$.

Par transitivité, on a donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n + 1)$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 4

9. Ensemble de définition de u :

$u(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right)$ est définie ssi $x \neq 0$ et $1 - \frac{a}{x} > 0 \iff \frac{x-a}{x} > 0$.

Un tableau de signes montre que la fraction est strictement positive sur $] - \infty, 0[\cup]a, +\infty[$.

Ainsi, $D_u =] - \infty, 0[\cup]a, +\infty[$.

10. Étude et signe de v sur $]a, +\infty[$:

v est dérivable sur $]a, +\infty[$ comme combinaison de fonctions dérivables :

$$\forall x > a, \quad v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} + \frac{a}{x^2} = \frac{x(x-a) - x^2 + a(x-a)}{x^2(x-a)} = \frac{x^2 - ax - x^2 + ax - a^2}{x^2(x-a)} = \frac{-a^2}{x^2(x-a)}$$

Puisque $a > 0$ et $x > a$, $x^2(x-a) > 0$, donc $v'(x) < 0$ sur $]a, +\infty[$.

v est donc **strictement décroissante** sur $]a, +\infty[$.

Étudions sa limite en $+\infty$: $\ln(x) - \ln(x-a) = -\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{a}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$.

Comme v est strictement décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, elle est strictement positive sur son domaine : $\forall x > a$, $v(x) > 0$.

11. Signe de w sur $]a, +\infty[$:

w est dérivable sur $]a, +\infty[$:

$$\forall x > a, \quad w'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} + \frac{a}{(x-a)^2} = \frac{(x-a)^2 - x(x-a) + ax}{x(x-a)^2} = \frac{a^2}{x(x-a)^2} > 0$$

w est donc **strictement croissante** sur $]a, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 0$.

Par croissance stricte vers 0, on en déduit que : $\forall x > a$, $w(x) < 0$.

12. Encadrement de $\ln x - \ln(x-a)$:

Des questions précédentes, pour tout $x > a$:

- $v(x) \geq 0 \implies \ln x - \ln(x-a) \geq \frac{a}{x}$;
- $w(x) \leq 0 \implies \ln x - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$.

On en conclut que : $\forall x > a$, $\frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$.

13. Encadrement de $u(x)$:

Remarquons que $\ln x - \ln(x-a) = -\ln\left(\frac{x-a}{x}\right) = -\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right)$.

L'encadrement précédent devient :

$$\frac{a}{x} \leq -\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \leq \frac{a}{x-a}$$

En multipliant par $-x < 0$ (car $x > a > 0$), les inégalités changent de sens :

$$-x \cdot \frac{a}{x-a} \leq x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \leq -x \cdot \frac{a}{x}$$

Ce qui donne l'encadrement recherché pour tout $x > a$:

$$-\frac{ax}{x-a} \leq u(x) \leq -a$$

Exercice 5

14. Soit $f \in \mathcal{A}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.
 Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = y \iff ax + b = y \iff x = \frac{y-b}{a}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ car $a \neq 0$.
 Toute fonction de $\mathcal{A}$ est donc une **bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$** , de réciproque $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.
15. Soient $(f, g) \in \mathcal{A}^2$ associées aux couples (a, b) et (c, d) avec $a, c \neq 0$.
 $g^{-1}(x) = \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}$. On a donc :

$$(f \circ g^{-1})(x) = a \left(\frac{1}{c}x - \frac{d}{c} \right) + b = \left(\frac{a}{c} \right) x + \left(b - \frac{ad}{c} \right)$$

Comme $a \neq 0$ et $c \neq 0$, $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}^*$, donc $f \circ g^{-1} \in \mathcal{A}$.

16. Soit $f \in \mathcal{A}$ définie par $f(x) = ax + b$.
 x est un point fixe de $f \iff ax + b = x \iff (a-1)x = -b$.
- Si $a \neq 1$, l'équation admet une unique solution $x = \frac{-b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$.
 - Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a aucun point fixe.
 - Si $a = 1$ et $b = 0$, $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$, tous les réels sont points fixes.

Les éléments de $\mathcal{A}$ admettant exactement un point fixe sont les fonctions affines de **coefficient directeur $a \neq 1$** .

17. Soit $f(x) = ax + b$. Si $\alpha \neq \beta$ sont deux points fixes distincts :

$$\begin{cases} a\alpha + b = \alpha \\ a\beta + b = \beta \end{cases} \implies a(\alpha - \beta) = \alpha - \beta \xrightarrow{\alpha \neq \beta} a = 1$$

Puis $a\alpha + b = \alpha \implies \alpha + b = \alpha \implies b = 0$.

On a donc nécessairement $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

18. Soit $(f, g) \in G^2$.
- $G \neq \emptyset$, soit $k \in G$. Par la propriété de stabilité de G , $k \circ k^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}} \in G$.
 - Pour $f \in G$, en appliquant la propriété avec $\text{id}_{\mathbb{R}} \in G$ et $f \in G$, on a $\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1} \in G$.
 - Pour $f, g \in G$, comme $g^{-1} \in G$, en appliquant la stabilité à f et g^{-1} , on a $f \circ (g^{-1})^{-1} = f \circ g \in G$.
19. Le coefficient directeur d'une composée d'applications affines est le produit de leurs coefficients directeurs.
 Si f a pour coefficient a et g a pour coefficient c ($a, c \in \mathbb{R}^*$) : f^{-1} a pour coefficient $\frac{1}{a}$ et g^{-1} a pour coefficient $\frac{1}{c}$.
 Le coefficient directeur de $h = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ est $a \cdot c \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} = 1$.
20. Raisonnons par l'absurde. Supposons $h(\beta) = \beta$.

$$(f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(\beta) = \beta \xLeftrightarrow{g^{-1}(\beta) = \beta} (f \circ g \circ f^{-1})(\beta) = \beta \iff g(f^{-1}(\beta)) = f^{-1}(\beta)$$

Ainsi, $f^{-1}(\beta)$ est un point fixe de g .

Comme $g \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$, g admet un unique point fixe qui est β . Donc $f^{-1}(\beta) = \beta \iff f(\beta) = \beta$.

Ceci signifie que β est un point fixe de f . Comme $f \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$, son unique point fixe est α .

On en déduit $\beta = \alpha$, ce qui contredit l'hypothèse $\alpha \neq \beta$. On a donc bien $h(\beta) \neq \beta$.

21. D'après la question 18, $h \in G$. Par définition de G , h doit admettre un point fixe.
 Or, d'après la question 19, h a un coefficient directeur égal à 1, donc $h(x) = x + C$.
- Si $C \neq 0$, h n'a aucun point fixe (ce qui contredit la définition de G).
 - Si $C = 0$, $h = \text{id}_{\mathbb{R}}$, donc $h(\beta) = \beta$ (ce qui contredit la question 20).

Dans tous les cas, on obtient une ****absurdité****.

22. L'hypothèse de départ (« il existe deux éléments de $G \setminus \{\text{id}_{\mathbb{R}}\}$ ayant des points fixes distincts ») est donc fausse.

Tous les éléments de $G \setminus \{\text{id}_{\mathbb{R}}\}$ possèdent le même unique point fixe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

23. Si G est fini, pour tout $g \in G$ associant le point fixe unique α_0 , $g(x) = a(x - \alpha_0) + \alpha_0$.
 La suite des composées $g^n(x) = a^n(x - \alpha_0) + \alpha_0$ devant prendre un nombre fini de valeurs dans G ,
 l'ensemble $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est fini, ce qui impose $a \in \{-1, 1\}$.
- Si $a = 1$, $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$.
 - Si $a = -1$, $g(x) = 2\alpha_0 - x$ (symétrie par rapport à α_0).

Conclusion : G contient au plus 2 éléments : $G = \{\text{id}_{\mathbb{R}}\}$ ou $G = \{\text{id}_{\mathbb{R}}, x \mapsto 2\alpha_0 - x\}$.