

Série PCSI / PTSI - vrai DS n°0001
Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.
Analyse, Logique, Équations et Fonctions affines (2h)

Profil : [Socle & Rentrée] **Technicité calculatoire :** ★★○ **Abstraction & Raisonnement :** ★★○

Exercice 1

On considère l’assertion, notée (A_1) , suivante :

$$(A_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \text{ est pair}) \implies (n \text{ est un multiple de } 6).$$

1. Écrire la négation de (A_1) , on la nommera (A_2) .
2. Écrire la réciproque de (A_1) , on la nommera (A_3) .
3. Écrire la contraposée de (A_1) , on la nommera (A_4) .
4. Pour chacune des assertions (A_1) , (A_2) , (A_3) et (A_4) dire, en le justifiant, si elle est vraie ou fausse.

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes d’inconnue $x \in \mathbb{R}$:

5. $|5x + 10| = |8x + 4|$;
6. $\sqrt{-x^2 + x + 3} \leq 2x + 1$;
7. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3} \geq 1$.

Exercice 3

8. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Exercice 4

On fixe $a > 0$ strictement positif. On note $u(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right)$.

9. Déterminer l’ensemble de définition de u .

Soit $x > a$. On pose :

$$v(x) = \ln(x) - \ln(x - a) - \frac{a}{x} \quad \text{et} \quad w(x) = \ln(x) - \ln(x - a) - \frac{a}{x - a}$$

10. Après avoir étudié la fonction v , déterminer son signe sur $]a, +\infty[$.
11. Déterminer le signe de w sur $]a, +\infty[$.
12. En déduire :

$$\forall x > a, \quad \frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x - a) \leq \frac{a}{x - a}$$

13. En déduire un encadrement de $u(x)$ pour $x > a$.

Exercice 5

Dans cet exercice, on considère toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

Pour une telle application f , le coefficient a défini par l'assertion ci-dessus est unique (on ne demande pas de le démontrer) et on l'appelle coefficient directeur de f .

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes ces fonctions.

On note $\text{id}_{\mathbb{R}}$ l'application identité de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui appartient à $\mathcal{A}$.

Pour tout $f \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathbb{R}$, on dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Dans tout cet exercice, on considère un sous-ensemble G de $\mathcal{A}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- G est non vide ;
 - pour tout $(f, g) \in G^2$ tel que g soit bijective, on a $f \circ g^{-1} \in G$;
 - tout élément de G admet (au moins) un point fixe.
14. Montrer que tout $f \in \mathcal{A}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
 15. Montrer que $\forall (f, g) \in \mathcal{A}^2, \quad f \circ g^{-1} \in \mathcal{A}$.
 16. Déterminer les éléments de $\mathcal{A}$ admettant exactement un point fixe.
 17. Soit $f \in \mathcal{A}$. Que dire de f si on dispose de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha \neq \beta$ et α, β soient des points fixes pour f ?
 18. Montrer que, pour tous $(f, g) \in G^2$, on a $f^{-1} \in G$ et $f \circ g \in G$.

Soit $(f, g) \in G^2$. On dispose alors de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta$.

On suppose que $f \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$, $g \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$ et $\alpha \neq \beta$.

19. Quel est le coefficient directeur de l'application $h = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$?
20. Montrer que $h(\beta) \neq \beta$.
21. En déduire une absurdité.
22. Qu'a-t-on ainsi démontré à propos des éléments de G ?
23. *Question non prioritaire.* Que dire de G si G contient un nombre fini d'éléments ?
Indication : on pourra prouver que, pour tout $g \in G$, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = \text{id}_{\mathbb{R}}$ (où g^n désigne la composée n fois de g par elle-même).