

Série PCSI / PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0002

Mathématiques — Septembre 2025, correction by Maths ingé

$$\text{Trigonométrie, Logique et Calcul de } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (4h)}$$

Questions diverses

1) La lettre grecque « éta » s'écrit η en minuscule et H en majuscule.

2) **Tracé des courbes :**

- (a) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques, déphasées de $\pi/2$. On trace $\sin$ (nulle en 0, maximale en $\pi/2$) et $\cos$ (égale à 1 en 0, nulle en $\pi/2$).
- (b) La fonction $\tan$ est π -périodique, présentant des asymptotes verticales aux points $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3) **Formules de trigonométrie :**

$$\begin{aligned} \triangleright \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a+b) &= \cos(\mathbf{a}) \cos(\mathbf{b}) - \sin(\mathbf{a}) \sin(\mathbf{b}) \\ \triangleright \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \cos(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \\ \triangleright \forall p, q \in \mathbb{R}, \quad \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{2}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{2}\right) \end{aligned}$$

4) **Valeurs remarquables :**

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pour le dernier terme, $185 = 3 \times 61 + 2$, donc $\frac{185\pi}{3} = 61\pi + \frac{2\pi}{3} = 60\pi + \pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \pi + \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

$$\sin\left(\frac{185\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5) Transformation sous forme d'amplitude-phase :

$$\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) = 2 \left(\cos(x) \cos \frac{\pi}{3} - \sin(x) \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

6) **Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:**

- (a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
- (b) D'après la formule de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta = \frac{\pi}{12}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \implies \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \implies \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

- (c) Vérifions l'égalité : $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Les deux valeurs sont bien identiquement égales.

7) **Résolution d'équations :**

- (a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \mathbf{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\mathbf{k}\pi, \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\mathbf{k}\pi, \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \right\}$.
- (b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \iff 3x + \frac{\pi}{6} \equiv 2x - \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x + \frac{\pi}{6} \equiv \pi - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) [2\pi]$.
- Cas 1 : $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - Cas 2 : $5x \equiv \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} [2\pi] \iff x \equiv \frac{7\pi}{30} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$.

- (c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right).$
- $x + \frac{\pi}{8} \equiv \frac{2\pi}{3} - 2x [2\pi] \iff 3x \equiv \frac{13\pi}{24} [2\pi] \iff x \equiv \frac{13\pi}{72} \left[\frac{2\pi}{3}\right].$
 - $x + \frac{\pi}{8} \equiv -\frac{2\pi}{3} + 2x [2\pi] \iff x \equiv \frac{19\pi}{24} [2\pi].$
- (d) Posons $X = \sin(x)$. $2X^2 - 5X + 2 = 0 \iff (2X - 1)(X - 2) = 0.$
Comme $X \in [-1, 1]$, la seule racine admissible est $X = \frac{1}{2}.$
 $\sin(x) = \frac{1}{2} \iff \mathbf{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\mathbf{k}\pi, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2\mathbf{k}\pi, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}.$
- (e) $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 1 \iff 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$
- $2x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi].$
 - $2x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \iff 2x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \iff x \equiv -\frac{\pi}{12} [\pi].$

8) **Calcul de l'intégrale** $I = \int_0^{\pi/6} \cos(3x) \cos(x) dx :$

(a) Linéarisation : $\cos(3x) \cos(x) = \frac{1}{2}(\cos(4x) + \cos(2x)).$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\pi/3)}{4} + \frac{\sin(\pi/3)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

(b) Par deux IPP successives : poser $u = \cos(3x)$ et $v' = \cos(x)$... La méthode par linéarisation confirme $I = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$

9) **Étude de** $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} :$

(a) $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$ (f impaire). $f(x+2\pi) = f(x)$ (2π -périodique).

(b) $f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + 1}{(2+\cos(x))^2}.$

Sur $[0, \pi]$, $f'(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right].$

f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right].$

Maximum en $x = \frac{2\pi}{3}$ valant $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{2-1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

10) (a) **VRAI.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en choisissant $m = n + 1 \in \mathbb{N}$, on a bien $n + 1 > n.$

(b) **FAUX.** Sa négation $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m$ est vraie (prendre $n = m$).

11) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pour $x \neq 1 :$

$$\frac{2x+3}{x-1} = y \iff 2x+3 = y(x-1) \iff x(y-2) = y+3 \iff x = \frac{y+3}{y-2}$$

Comme $y \neq 2$, x existe et est unique. De plus, si $x = 1$, alors $y+3 = y-2 \implies 3 = -2$ (impossible).
Donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

Exercice — Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

I — Une équation trigonométrique

(I.1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha).$

(I.2) $\cos(4x) = -\cos(x) \iff \cos(4x) = \cos(\pi - x).$

- $4x \equiv \pi - x [2\pi] \iff 5x \equiv \pi [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5}\right].$

- $4x \equiv -(\pi - x) [2\pi] \iff 3x \equiv -\pi [2\pi] \iff x \equiv -\frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right].$

$$S = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi+2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

II — Un mystérieux x_0

$$(II.1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4} \iff 2\sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{5} \iff 8 \leq 6 + 2\sqrt{5} \iff 1 \leq \sqrt{5} \text{ (Vrai).}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \leq 1 \iff \sqrt{5} \leq 3 \iff 5 \leq 9 \text{ (Vrai).}$$

(II.2) La fonction $\cos$ est une bijection strictement décroissante de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

Comme $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, il existe un ****unique**** $x_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\cos(x_0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$$(II.3) \text{ D'une part : } \cos(2x_0) = 2\cos^2(x_0) - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\text{D'autre part : } \cos(4x_0) = 2\cos^2(2x_0) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

III — Conclusion

(III.1) De II.3, $\cos(4x_0) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} = -\cos(x_0)$. Donc x_0 est solution de l'équation (I.2).

Les solutions dans $[0, \frac{\pi}{4}]$ sont réduites au seul élément $\frac{\pi}{5}$. D'où $x_0 = \frac{\pi}{5}$.

(III.2) On en conclut immédiatement que : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Problème — Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

I — Convergence de S

(I.1) $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est ****strictly croissante****.

(I.2) Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ car $k(k-1) \leq k^2$.

(I.3) Par somme télescopique : $S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.

(I.4) La suite (S_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

II — Limite de T

$$(II.1) \quad S_{2n} - T_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} S_n.$$

$$(II.2) \quad T_n = S_{2n} - \frac{1}{4} S_n. \text{ Par passage à la limite quand } n \rightarrow +\infty : T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \frac{\ell}{4} = \frac{3\ell}{4}.$$

III — Des inégalités

(III.1) Posons $g(x) = x - \sin(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. $g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. Comme $g(0) = 0$, $g(x) \geq 0 \implies x \geq \sin(x)$.

(III.2) Posons $h(x) = \tan(x) - x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. $h'(x) = \tan^2(x) \geq 0$. Comme $h(0) = 0$, $h(x) \geq 0 \implies x \leq \tan(x)$.

(III.3) De $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, par passage à l'inverse au carré pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} \implies \frac{1}{\sin^2(x)} - 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} \iff \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} + 1$$

IV — Encore un calcul de limite

(IV.1) Pour $x = \frac{(2k-1)\pi}{4n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{16n^2}{(2k-1)^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \leq \frac{16n^2}{(2k-1)^2\pi^2} + 1$$

En sommant de $k = 1$ à n : $\frac{16n^2}{\pi^2}T_n \leq U_n \leq \frac{16n^2}{\pi^2}T_n + n$.

(IV.2) En divisant par n^2 : $\frac{16}{\pi^2}T_n \leq \frac{U_n}{n^2} \leq \frac{16}{\pi^2}T_n + \frac{1}{n}$.

Par le théorème des gendarmes, comme $T_n \rightarrow \frac{3\ell}{4}$, $\frac{U_n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{3\ell}{4} = \frac{12\ell}{\pi^2}$.

(IV.3) La suite extraite $(\frac{U_{2^m}}{4^m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite : $\frac{U_{2^m}}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{12\ell}{\pi^2}$.

V — Le retour de la trigo

(V.1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$.

(V.2) $\frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2} = \frac{4}{\sin^2(2x)}$.

(V.3) En appliquant V.2 avec $x = \frac{k\pi}{8n}$: $\frac{1}{\cos^2(k\pi/8n)} = \frac{1}{\sin^2(\pi/2 - k\pi/8n)} = \frac{1}{\sin^2((4n-k)\pi/8n)}$.

On obtient bien l'identité demandée.

(V.4) En sommant les égalités précédentes pour les indices impairs : $4U_n = U_{2n}$.

(V.5) Par récurrence simple : $U_{2^m} = 4^m U_1$. Or $U_1 = \frac{1}{\sin^2(\pi/4)} = 2$. Donc $U_{2^m} = 2 \times 4^m$.

VI — Conclusion

(VI.1) D'après V.5, $\frac{U_{2^m}}{4^m} = 2$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

D'après IV.3, la limite de cette suite constante vaut $\frac{12\ell}{\pi^2}$.

D'où $\frac{12\ell}{\pi^2} = 2 \implies \ell = \frac{\pi^2}{6}$.