

Série PCSI / PTSI - vrai DS n°0002
Mathématiques — Septembre 2025, Quelquepart.

Trigonométrie, Logique et Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : **○

Questions diverses

Tous les exercices de cette partie sont indépendants.

- 1) Donner la minuscule et la majuscule de la lettre grecque « êta ».
- 2) (a) Sur le même graphique, tracer la courbe représentative des fonctions sin et cos.
(b) Tracer la courbe représentative de la fonction tan.
- 3) Rappeler (sans preuve) les formules suivantes :
 - ▷ $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a+b) = \dots$
 - ▷ $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a)\cos(b) = \dots$
 - ▷ $\forall p, q \in \mathbb{R}, \quad \cos(p) + \cos(q) = \dots$
- 4) Donner les valeurs suivantes, en plaçant chacun des angles sur un cercle trigonométrique :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{185\pi}{3}\right)$$

- 5) Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire l'expression $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $\lambda \cos(x \pm \varphi)$.
- 6) Dans cette question, on cherche à déterminer de deux manières différentes la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 - (a) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
 - (b) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant une formule de duplication.
 - (c) Vérifier par le calcul que les valeurs obtenues en (a) et en (b) sont les mêmes.
- 7) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
 - (a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - (b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
 - (c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
 - (d) $2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = 0$
 - (e) $\sqrt{3}\cos(2x) + 2\sin(x)\cos(x) = 1$
- 8) Dans cette question, on cherche à calculer de deux manières différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/6} \cos(3x)\cos(x) \, dx$$

- (a) Calculer I en utilisant une formule de trigonométrie.
 - (b) Calculer I en utilisant deux intégrations par parties successives.
- 9) On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} \end{cases}$
- (a) Montrer que f est impaire et 2π -périodique.
 - (b) Établir le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

- (c) Esquisser le graphe de f .
- 10) (a) Montrer la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m > n$.
 (b) Montrer que la proposition suivante est fausse : $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, m > n$.
- 11) Montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists! x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \frac{2x+3}{x-1} = y$$

Exercice — Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

I — Une équation trigonométrique

(I.1) Compléter la formule suivante, en l'illustrant à l'aide d'un schéma :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(\pi - \alpha) = \dots$$

(I.2) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(4x) = -\cos(x)$$

II — Un mystérieux x_0

- (II.1) Montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4} \leq 1$.
- (II.2) Montrer que : $\exists! x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] : \cos(x_0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
On considère désormais cet unique x_0 .
- (II.3) Montrer que : $\cos(4x_0) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

III — Conclusion

- (III.1) Déterminer la valeur de x_0 .
- (III.2) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Problème — Calcul de $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\begin{aligned} \triangleright S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ \triangleright T_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \\ \triangleright U_n &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{4n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{4n}\right)} + \dots + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)} \end{aligned}$$

I — Convergence de S

- (I.1) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (I.2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

(I.3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2$.

(I.4) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On notera ℓ la limite de cette suite : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

II — Limite de T

(II.1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - T_n = \frac{1}{4}S_n$.

(II.2) Montrer que : $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3\ell}{4}$.

III — Des inégalités

(III.1) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \geq \sin(x)$.

On pourra étudier la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$.

(III.2) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \leq \tan(x)$.

(III.3) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} + 1$.

IV — Encore un calcul de limite

(IV.1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{16n^2}{\pi^2}T_n \leq U_n \leq \frac{16n^2}{\pi^2}T_n + n$.

(IV.2) Montrer que : $\frac{U_n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{12\ell}{\pi^2}$.

(IV.3) Montrer que : $\frac{U_{2^m}}{4^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{12\ell}{\pi^2}$.

V — Le retour de la trigo

(V.1) Compléter la formule suivante, en l'illustrant à l'aide d'un schéma :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots$$

(V.2) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{4}{\sin^2(2x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)}$.

(V.3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in]0, 4n[, \frac{4}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{8n}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(4n-k)\pi}{8n}\right)}$.

(V.4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4U_n = U_{2n}$.

(V.5) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, U_{2^m} = 2 \times 4^m$.

VI — Conclusion

(VI.1) Montrer que : $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

Ce résultat, d'une importance mathématique majeure, sera noté d'ici la fin de l'année comme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$