

Série PCSI / PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0003

Mathématiques — Septembre 2026, Corrigé by Maths ingé

Trigonométrie, Logique et Formule de Viète (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Partie I — Questions diverses

Q1) La lettre grecque « rho » s'écrit ρ en minuscule et P en majuscule.

Q2) Caractérisation de la borne supérieure :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Le réel $M = \sup(A)$ est l'unique réel vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \leq M & (M \text{ est un majorant de } A) \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x \in A, & x > M - \varepsilon & (\text{C'est le plus petit des majorants}) \end{cases}$$

Q3) (a) Tracé de $\sin$ et $\cos$: $\cos$ démarre à 1 en $x = 0$, $\sin$ démarre à 0. Les deux oscillent entre -1 et 1 avec une période de 2π .

(b) Tracé de $\tan$: asymptotes verticales en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, passe par l'origine.

Q4) Valeurs trigonométriques : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. En se plaçant dans le deuxième quadrant du cercle trigonométrique, on lit :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Q5) Factorisation par l'amplitude :

$$\cos(t) - \sqrt{3}\sin(t) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(t) \right) = 2 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Q6) Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

(b) Avec la formule de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta = \frac{\pi}{12}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \implies \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \implies \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, son cosinus est positif. D'où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

(c) Vérifions que les carrés sont égaux (les deux nombres étant positifs) :

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

L'égalité est bien confirmée.

Q7) Résolution d'équations :

(a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \iff x + \frac{\pi}{3} \equiv 2x - \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{3} \equiv \pi - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) [2\pi]$.

• Cas 1 : $x \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

• Cas 2 : $3x \equiv \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(b) Posons $X = \cos(x)$. L'équation devient $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$. Les racines sont $X_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{5+3}{4} = 2$.
Comme $\cos(x) \in [-1, 1]$, on rejette $X_2 = 2$. Il reste : $\cos(x) = \frac{1}{2} \iff x \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Q8) Calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\pi/6} \cos(3t) \cos(t) dt$:

(a) Linéarisation : $\cos(3t) \cos(t) = \frac{1}{2}(\cos(4t) + \cos(2t))$.

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4t)}{4} + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\pi/3)}{4} + \frac{\sin(\pi/3)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

(b) Par parties (1) : poser $u = \cos(3t), v' = \cos(t) \implies u' = -3 \sin(3t), v = \sin(t)$.

$$I = [\cos(3t) \sin(t)]_0^{\pi/6} + 3 \int_0^{\pi/6} \sin(3t) \sin(t) dt = 0 + 3J$$

Par parties (2) pour J : $u = \sin(3t), v' = \sin(t) \implies u' = 3 \cos(3t), v = -\cos(t)$.

$$J = [-\sin(3t) \cos(t)]_0^{\pi/6} + 3 \int_0^{\pi/6} \cos(3t) \cos(t) dt = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 3I$$

On injecte J dans l'équation de I : $I = 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3I \right) \implies I = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + 9I \implies 8I = \frac{3\sqrt{3}}{2} \implies I = \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Q9) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Cherchons $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $y = \frac{3x+1}{x-2}$.

$$y(x-2) = 3x+1 \iff x(y-3) = 2y+1 \iff_{y \neq 3} x = \frac{2y+1}{y-3}$$

La solution x existe et est unique car $y \neq 3$.

Vérifions que $x \neq 2$. Si $x = 2$, alors $2 = \frac{2y+1}{y-3} \implies 2y-6 = 2y+1 \implies -6 = 1$, ce qui est absurde.
Ainsi, l'existence et l'unicité de $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ sont garanties.

Q10) (a) En utilisant les formules de Simpson :

$$\frac{\cos(p) - \cos(q)}{\sin(p) + \sin(q)} = \frac{-2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

(b) Posons $p = \frac{\pi}{6}$ et $q = \frac{\pi}{4}$. Alors $\frac{p-q}{2} = \frac{2\pi/12 - 3\pi/12}{2} = -\frac{\pi}{24}$.

$$-\tan\left(-\frac{\pi}{24}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

En multipliant par la quantité conjuguée $(\sqrt{2} - 1)$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2.$$

Q11) (a) Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$. f est dérivable et $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
 $f'(x)$ est du signe de x . f est décroissante sur $] -1, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$.

Son minimum en 0 vaut $f(0) = 0$. Ainsi $\forall x > -1, f(x) \geq 0 \implies \ln(1+x) \leq x$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité précédente pour $x = \frac{1}{k} \in] -1, +\infty[$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \iff \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \iff \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

(c) En sommant ces inégalités de $k = 1$ à n :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k))$$

La somme de droite est télescopique : $\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$.
D'où $H_n \geq \ln(n+1)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par théorème de minoration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$$

Partie II — Problème : Formule de Viète

I — Étude de a

(I.1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : a_n \in [0, 2]$.

- **Initialisation** : $a_0 = 0 \in [0, 2]$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. $0 \leq a_n \leq 2 \implies 2 \leq 2 + a_n \leq 4$.
La fonction racine carrée étant strictement croissante : $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{4} = 2$.
On a donc $a_{n+1} \in [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$. L'hérédité est établie.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, 2]$.

(I.2) Montrons par récurrence que $a_{n+1} \geq a_n$.

- $a_1 = \sqrt{2} \geq 0 = a_0$.
- Si $a_{n+1} \geq a_n$, alors $2 + a_{n+1} \geq 2 + a_n$, d'où en passant à la racine : $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

La suite a est donc **croissante**.

Variante avec le signe de $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 2)(a_n + 1) \geq 0$ car $a_n \in [0, 2]$.

(I.3) La suite a est croissante et majorée (par 2), donc d'après le théorème de la limite monotone, **la suite a converge**.

(I.4) Soit $\ell = \lim a_n$. En passant la relation de récurrence à la limite (car $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est continue) :

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \implies \ell^2 = 2 + \ell \implies \ell^2 - \ell - 2 = 0$$

Les racines de ce trinôme sont -1 et 2 . Comme $a_n \geq 0$ pour tout n , la limite est positive.
Donc $\ell = 2$.

II — Une expression de b

(II.1) Soit $\theta \in [0, \pi]$. D'après la formule de duplication $\cos(\theta) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$, on isole :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$$

Comme $\theta \in [0, \pi]$, $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$. En prenant la racine carrée :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$$

(II.2) Démontrons par récurrence $\mathcal{Q}(n) : b_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

- **Initialisation** ($n = 0$) : $b_0 = \frac{a_0}{2} = 0$. Par ailleurs, $\cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie.

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{2+a_n}}{2} = \sqrt{\frac{2+2b_n}{4}} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}$$

D'après l'HR, $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. En appliquant II.1 avec $\theta = \frac{\pi}{2^{n+1}} \in [0, \pi]$:

$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

L'hérédité est vérifiée. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III — Convergence de la suite c

(III.1) $c_n = b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n$.

Pour tout $k \geq 1$, $b_k = \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) \in]0, 1[$ car $\frac{\pi}{2^{k+1}} \in]0, \frac{\pi}{4}]$.

Ainsi, $c_{n+1} = c_n \times b_{n+1}$. Comme $0 < b_{n+1} < 1$ et $c_n > 0$, on a $c_{n+1} \leq c_n$.

La suite c est **décroissante** et **minorée par 0**, donc **elle converge**.

IV — Limite de la suite c

(IV.1) On sait que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Pour $x = \frac{\pi}{2^{n+1}} \neq 0$, on a $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}$.

En appliquant ceci à $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$:

$$b_n = \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

(IV.2) Remplaçons chaque b_k dans le produit $c_n = \prod_{k=1}^n b_k$:

$$c_n = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

Le produit est télescopique. Tous les sinus se simplifient en cascade, sauf le numérateur pour $k = 1$ et le dénominateur pour $k = n$.

$$c_n = \frac{1}{2^n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \quad (\text{car } \sin(\pi/2) = 1)$$

(IV.3) Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow 0$. On utilise l'équivalent usuel $\sin(X) \underset{0}{\sim} X$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

D'où :

$$c_n \sim \frac{1}{2^n \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{2^n \pi} = \frac{2}{\pi}$$

On conclut finalement que le produit infini (formule de Viète) vaut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{2}{\pi}$$