

Série PCSI / PTSI - vrai DS n°0003
Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.
Trigonométrie, Logique et Formule de Viète (4h)

Profil : [Classique CPGE] **Technicité calculatoire :** ★★○ **Abstraction & Raisonnement :** ★★○

Partie I — Questions diverses

Toutes les questions de cette partie sont indépendantes.

- Q1)** Donner la minuscule et la majuscule de la lettre grecque « rho ».
- Q2)** Énoncer la caractérisation de la borne supérieure.
- Q3)** (a) Sur un même graphique, tracer la courbe représentative des fonctions $\sin$ et $\cos$.
(b) Sur un autre graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $\tan$.
- Q4)** Donner les valeurs suivantes, en illustrant votre réponse d'un schéma :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

- Q5)** Pour $t \in \mathbb{R}$, écrire l'expression $\cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)$ sous la forme $C \cos(t \pm \varphi)$.
- Q6)** Dans cette question, on cherche à déterminer de deux manières différentes la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- (a) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
- (b) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant une formule de duplication.
- (c) Vérifier par le calcul que les valeurs obtenues en (a) et en (b) sont les mêmes.
- Q7)** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
- (a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- (b) $2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$
- Q8)** Dans cette question, on cherche à calculer de deux manières différentes l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/6} \cos(3t) \cos(t) dt$$

- (a) Calculer I en utilisant une formule de trigonométrie.
- (b) Calculer I en utilisant deux intégrations par parties successives.
- Q9)** Montrer que :
- $$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad \exists ! x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : \quad y = \frac{3x+1}{x-2}$$
- Q10)** (a) Soient $p, q \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression suivante a un sens :

$$\frac{\cos(p) - \cos(q)}{\sin(p) + \sin(q)}$$

Simplifier cette expression en utilisant les formules de factorisation.

- (b) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.
- Q11)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- (a) En posant une fonction appropriée, montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

(b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$$

(c) Montrer que : $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Partie II — Problème : Formule de Viète

Définition

On considère la suite a suivante, où le terme a_n comprend n racines imbriquées :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

Autrement dit, a est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \frac{a_n}{2}$.
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n$.

I — Étude de a

- (I.1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [0, 2]$.
- (I.2) Montrer que a est croissante.
- (I.3) Montrer que a converge.
- (I.4) Déterminer la limite de a .

II — Une expression de b

- (II.1) Montrer que : $\forall \theta \in [0, \pi], \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$.
- (II.2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

III — Convergence de la suite c

- (III.1) Montrer que la suite c converge.

IV — Limite de la suite c

- (IV.1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.
- (IV.2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.
- (IV.3) Montrer que : $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}$.