

Série PCSI / PTSI - CORRIGE : vrai DS n°0004

Mathématiques — 19 Septembre 2026, corrigé par Maths Ingé

Calculs algébriques, Équations, Inégalités et Récurrence (1h55)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Questions de cours

1. Définition de la valeur absolue :

Pour tout réel a , la valeur absolue de a , notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

2. Factorisation de $a^4 - b^4$:

Pour tous réels a et b :

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

3. Inégalité triangulaire et son corollaire :

- **Inégalité triangulaire** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$.
- **Corollaire (seconde inégalité triangulaire)** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

4. Somme géométrique :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Exercice 1

1. Résolution des inéquations dans $\mathbb{R}$:

(a) $4x^2 - 9 \geq 0 \iff (2x - 3)(2x + 3) \geq 0$.

Le trinôme possède deux racines $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$. Il est positif à l'extérieur de ses racines.

Conclusion : $S = \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

(b) $x^2 + 6 < 5x \iff x^2 - 5x + 6 < 0 \iff (x - 2)(x - 3) < 0$.

Les racines du trinôme sont 2 et 3. Le trinôme est strictement négatif entre ses racines.

Conclusion : $S =]2, 3[$.

(c) $|3x + 2| \leq 5 \iff -5 \leq 3x + 2 \leq 5 \iff -7 \leq 3x \leq 3 \iff -\frac{7}{3} \leq x \leq 1$.

Conclusion : $S = \left[-\frac{7}{3}, 1 \right]$.

2. Étude de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n (5k - 2)$:

(a) $S_2 = (5 \times 1 - 2) + (5 \times 2 - 2) = 3 + 8 = 11$.

(b) Par linéarité de la somme :

$$S_n = 5 \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n 1 = 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n = n \left(\frac{5n+5-4}{2} \right) = \frac{n(5n+1)}{2}$$

Vérification pour $n = 2$: $S_2 = \frac{2(10+1)}{2} = 11$, cohérent.

3. **Inégalité** $n^2 > 2n + 1$ **pour** $n \geq 3$:

Considérons le trinôme $P(x) = x^2 - 2x - 1$.

Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 4(-1) = 8 > 0$. Ses racines sont $x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$.

Pour tout $n \geq 3$, $n > 1 + \sqrt{2}$, donc $P(n) > 0$, ce qui équivaut bien à $n^2 > 2n + 1$.

4. **Encadrement de** $x - y$:

On sait que $p \leq y < p + 1 \iff -(p + 1) < -y \leq -p$.

En sommant avec l'encadrement $n \leq x < n + 1$:

$$n - (p + 1) < x - y < (n + 1) - p$$

Conclusion : $n - p - 1 < x - y < n - p + 1$.

5. **Étude d'assertion et négation** :

(a) L'assertion est **FAUSSE**.

Contre-exemple : Choisir $x = 1$, $y = 2$ et $z = -1$.

On a bien $x < y$ ($1 < 2$), mais $xz = -1$ et $yz = -2$, donc $xz > yz$.

(b) Négation formelle :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad \exists z \in \mathbb{R}, \quad (x < y) \quad \text{et} \quad (xz \geq yz)$$

Exercice 2

1. **Décomposition de 72 et diviseurs** :

$$72 = 8 \times 9 = \mathbf{2^3} \times \mathbf{3^2}$$

Le nombre de diviseurs positifs de 72 vaut $(3 + 1)(2 + 1) = 12$.

Les diviseurs positifs sont obtenus en faisant varier les puissances de 2 (de 0 à 3) et de 3 (de 0 à 2) :

$$\mathcal{D}(72) = \{1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{12}, \mathbf{18}, \mathbf{24}, \mathbf{36}, \mathbf{72}\}$$

2. **Forme canonique de** $x^2 - 6x - 63$:

$$x^2 - 6x - 63 = (x - 3)^2 - 9 - 63 = (\mathbf{x - 3})^2 - \mathbf{72} = (x - 3)^2 - (\sqrt{72})^2$$

Ainsi, $u = 3$ et $v = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

3. **Résolution de l'équation** $(E) : p^2 - 6p - 63 = q^2$ **sur** $\mathbb{N}^2$:

D'après la question précédente, l'équation s'écrit :

$$(p - 3)^2 - 72 = q^2 \iff (p - 3)^2 - q^2 = 72 \iff (p - 3 - q)(p - 3 + q) = 72$$

Posons $d_1 = p - 3 - q$ et $d_2 = p - 3 + q$.

- $d_1 \cdot d_2 = 72 > 0$, donc d_1 et d_2 sont de même signe.
- Puisque $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 0$, d'où $d_2 \geq d_1$. De plus, $d_1 + d_2 = 2(p - 3) \in \mathbb{Z}$, ce qui impose que d_1 et d_2 ont la même parité.
- Le produit de deux entiers de même parité valant $72 > 0$ impose que d_1 et d_2 sont tous deux ****pairs et positifs**** (car si tous deux négatifs, $d_2 = p - 3 + q < 0$ contredirait $p, q \in \mathbb{N}$).

Les couples (d_1, d_2) de diviseurs pairs positifs de 72 vérifiant $d_1 \leq d_2$ sont :

$$(2, 36), \quad (4, 18), \quad (6, 12)$$

Réolvons chaque système :

- **Cas 1** : $\begin{cases} p - 3 - q = 2 \\ p - 3 + q = 36 \end{cases} \implies 2(p - 3) = 38 \implies p = 22, \quad q = 17 \in \mathbb{N}.$
- **Cas 2** : $\begin{cases} p - 3 - q = 4 \\ p - 3 + q = 18 \end{cases} \implies 2(p - 3) = 22 \implies p = 14, \quad q = 7 \in \mathbb{N}.$
- **Cas 3** : $\begin{cases} p - 3 - q = 6 \\ p - 3 + q = 12 \end{cases} \implies 2(p - 3) = 18 \implies p = 12, \quad q = 3 \in \mathbb{N}.$

Conclusion : Les couples solutions sont $\mathcal{S} = \{(12, 3), (14, 7), (22, 17)\}$.

Exercice 3

1. Définition de $n!$:

Pour un entier naturel $n \geq 1$, la factorielle de n , notée $n!$, est le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

2. Démonstration par récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la propriété $\mathcal{P}(n) : \prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$.

• Initialisation ($n = 1$) :

Membre de gauche : $\prod_{k=1}^1 (2k)! = (2)! = 2.$

Membre de droite : $((1+1)!)^1 = (2!)^1 = 2.$

Comme $2 \geq 2$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hérédité :

Soit $n \geq 1$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$.

Au rang $n+1$, le produit s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k)! = \left(\prod_{k=1}^n (2k)! \right) \times (2n+2)! \underset{\text{(H.R.)}}{\geq} ((n+1)!)^n \times (2n+2)!$$

Pour établir $\mathcal{P}(n+1)$, nous devons montrer que cet expression est supérieure ou égale à $((n+2)!)^{n+1}$.

Remarquons que $((n+2)!)^{n+1} = ((n+2)(n+1)!)^{n+1} = (n+2)^{n+1}((n+1)!)^{n+1}$.

En simplifiant par $((n+1)!)^n > 0$, l'inégalité à prouver revient à établir :

$$(2n+2)! \geq (n+2)^{n+1}(n+1)! \iff \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \geq (n+2)^{n+1}$$

Développons le quotient à gauche :

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = (n+2)(n+3)(n+4) \dots (2n+2)$$

Ce produit contient exactement $(2n+2) - (n+2) + 1 = n+1$ facteurs.
 Chacun des facteurs $(n+j)$ pour $j \in \llbracket 2, n+2 \rrbracket$ vérifie $n+j \geq n+2$.
 Par conséquent :

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \prod_{j=2}^{n+2} (n+j) \geq \prod_{j=2}^{n+2} (n+2) = (n+2)^{n+1}$$

En remultipliant par $((n+1)!)^n$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k)! \geq (n+2)^{n+1} ((n+1)!)^{n+1} = ((n+2)!)^{n+1}$$

Ce qui démontre la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$.