

PCSI / PTSI - vrai DS n°0004

Mathématiques — 19 Septembre 2026, Quelquepart.

Calculs algébriques, Équations, Inégalités et Récurrence (1h55)

Profil : [Socle & Rentrée]

Technicité calculatoire : ★○○

Abstraction & Raisonnement : ★○○

Questions de cours

1. Écrire la définition de la valeur absolue d'un réel a .
2. Pour a et b quelconques dans $\mathbb{R}$, écrire la factorisation de $a^4 - b^4$ par $a - b$.
3. Pour deux réels x et y , écrire l'inégalité triangulaire et son corollaire.
4. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et q dans $\mathbb{R}$, donner sans justification la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n q^k$ en fonction de n et q .

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes et écrire son ensemble des solutions, noté S :
 - (a) $4x^2 - 9 \geq 0$.
 - (b) $x^2 + 6 < 5x$.
 - (c) $|3x + 2| \leq 5$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (5k - 2)$, où n est un entier naturel non nul.
 - (a) Calculer S_2 .
 - (b) Calculer S_n sous forme factorisée en fonction de l'entier n .
3. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $n^2 > 2n + 1$.
4. x et y sont deux réels, n et p deux entiers relatifs tels que $n \leq x < n + 1$ et $p \leq y < p + 1$. Donner le meilleur encadrement de $x - y$ à l'aide de n et p que l'on peut en déduire.
5. (a) L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies xz < yz$$

- (b) Écrire en langage symbolique la négation de cette proposition.

Exercice 2

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers du nombre 72 et en déduire tous ses diviseurs positifs.
2. Mettre sous sa forme canonique l'expression polynôme $x^2 - 6x - 63$ de variable x réelle, c'est-à-dire, sous la forme $(x - u)^2 - v^2$ avec u et v des réels indépendants de x , à déterminer.
3. En déduire tous les couples (p, q) d'entiers naturels qui sont solutions de l'équation :

$$(E) : p^2 - 6p - 63 = q^2$$

Exercice 3

1. Donner la définition de $n!$, la factorielle de n , pour un entier naturel non nul n .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$$