

Série PCSI / PTSI - CORRIGE : vrai DS n°0005

Mathématiques — 6 Octobre 2025, Quelque part. Corrigé by Maths Ingé

Nombres complexes, Trigonométrie et Sommes (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Questions de cours & applications directes

1. Formules d'Euler et de Moivre :

- **Euler** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$
- **Moivre** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$

2. Simplification et résolution :

$$\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

Pour l'équation : $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \iff 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \iff \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Conclusion : $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

3. Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

$|z - 1| = |z + 1| \iff AM = BM \iff M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Conclusion : L'ensemble recherché est l'axe des ordonnées ($\text{Re}(z) = 0$).

4. Équation $z^2 - (3 + 2i)z + (5 + i) = 0$:

Discriminant : $\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(5 + i) = 9 - 4 + 12i - 20 - 4i = -15 + 8i.$

Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = 17 \\ 2ab = 8 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a^2 = 2 \implies a = \pm 1 \\ 2b^2 = 32 \implies b = \pm 4 \end{cases}$$

Comme $ab > 0$, on choisit $\delta = 1 + 4i$. Les deux racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{3 + 2i + (1 + 4i)}{2} = 2 + 3i, \quad z_2 = \frac{3 + 2i - (1 + 4i)}{2} = 1 - i$$

5. Linéarisation de $\cos^3(x) \sin^4(x)$:

En utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos^3(x) \sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\ &= \frac{1}{128} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \end{aligned}$$

Après développement et regroupement des termes conjugués :

$$\cos^3(\mathbf{x}) \sin^4(\mathbf{x}) = \frac{1}{64} (\cos(7\mathbf{x}) - \cos(5\mathbf{x}) - 3\cos(3\mathbf{x}) + 3\cos(\mathbf{x}))$$

6. D'après la formule de Moivre et le binôme de Newton :

$$\sin(5x) = \text{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^5) = 5 \cos^4(\mathbf{x}) \sin(\mathbf{x}) - 10 \cos^2(\mathbf{x}) \sin^3(\mathbf{x}) + \sin^5(\mathbf{x})$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Encadrons $9n^2 + 1$ par deux carrés parfaits consécutifs :

$$(3n)^2 = 9n^2 < 9n^2 + 1 < 9n^2 + 6n + 1 = (3n + 1)^2$$

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$3n < \sqrt{9n^2 + 1} < 3n + 1$$

Par définition de la partie entière, $\lfloor \sqrt{9n^2 + 1} \rfloor = 3n$, qui est bien un multiple de 3.

Exercice 2 — Exercices indépendants sur les complexes

1. (a) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.
 (b) $(1 - i)^{4n} = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{4n} = (\sqrt{2})^{4n}e^{-in\pi} = (-1)^n 2^{2n} = (-4)^n$.
2. Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$. Par la technique de l'angle moitié :

$$1 + z = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}, \quad 1 - z = 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

D'où :

$$i \frac{1+z}{1-z} = i \frac{2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}}{-2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}} = -\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

3. $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
 (a) $u^2 = (2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$.
 Module : $|u^2| = \sqrt{8 + 8} = 4$. Forme trigonométrique : $u^2 = 4e^{-i3\pi/4}$.
 (b) $|u| = \sqrt{4} = 2$.
 Puisque $\operatorname{Re}(u) > 0$ et $\operatorname{Im}(u) < 0$, un argument de u vérifie $2 \arg(u) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$ et $\arg(u) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.
 D'où $\arg(u) \equiv -\frac{3\pi}{8} [2\pi]$.
4. (a) $u^4 = -4 = 4e^{i\pi} \iff u_k = \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
 Forme algébrique des quatre solutions : $1 + i, \quad -1 + i, \quad -1 - i, \quad 1 - i$.
 (b) L'équation s'écrit $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4$.
 Posons $Z = \frac{z+1}{z-1} \iff z(Z-1) = Z+1 \iff z = \frac{Z+1}{Z-1}$. En injectant les 4 valeurs de Z :
 - $Z = 1 + i \implies z = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$.
 - $Z = -1 + i \implies z = \frac{i}{-2+i} = \frac{1-2i}{5}$.
 - $Z = -1 - i \implies z = \frac{-i}{-2-i} = \frac{1+2i}{5}$.
 - $Z = 1 - i \implies z = \frac{2-i}{-i} = 1 + 2i$.

Exercice 3 — Sommes complexes et racines de l'unité

$$1. S_p = \sum_{k=1}^n (\omega^p)^k.$$

- Si $p \in n\mathbb{Z}$: $\omega^p = 1$, donc $S_p = \sum_{k=1}^n 1 = n$.
- Si $p \notin n\mathbb{Z}$: $\omega^p \neq 1$, somme géométrique de raison ω^p :

$$S_p = \omega^p \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = \omega^p \frac{1 - (\omega^n)^p}{1 - \omega^p} = 0 \quad (\text{car } \omega^n = 1)$$

$$2. \quad (a) \quad A - \omega A = \sum_{k=1}^n k\omega^k - \sum_{k=1}^n k\omega^{k+1} = \sum_{k=1}^n k\omega^k - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)\omega^j = \sum_{k=1}^n \omega^k - n\omega^{n+1} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{n}\omega \quad (\text{car } \omega^{n+1} = \omega).$$

(b) Comme $n \geq 2$, $1 \notin n\mathbb{Z}$ donc $S_1 = 0$. Ainsi $A(1 - \omega) = -n\omega \implies \mathbf{A} = -\frac{n\omega}{1-\omega}$.

3. En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j \omega^{k(n-j)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j \sum_{k=1}^n \omega^{k(n-j)} = \sum_{j=0}^n S_{n-j} \binom{n}{j} z^j$$

Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $n - j$ est un multiple de n si et seulement si $j = 0$ ou $j = n$.

Les termes pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ont un coefficient $S_{n-j} = 0$. Il ne reste que :

$$\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n = \mathbf{S}_n \binom{n}{0} z^0 + \mathbf{S}_0 \binom{n}{n} z^n = \mathbf{n} + \mathbf{n}z^n = \mathbf{n}(1 + z^n)$$

Exercice 4 — Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$$1. \quad \beta = \omega^2 + \omega^3 = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right). \text{ Comme } \frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \operatorname{Re}(\beta) < 0.$$

$$2. \quad \alpha + \beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = S_1 - 1 = -1.$$

$$\alpha\beta = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1.$$

$$3. \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont les racines du polynôme } X^2 + X - 1 = 0.$$

Discriminant : $\Delta = 5$. Les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Comme $\beta < 0$, on identifie : $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$4. \quad \omega^4 = e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5} = \bar{\omega}.$$

$$\text{D'où } \alpha = \omega + \bar{\omega} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \implies \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

5. Par la relation des angles complémentaires :

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Exercice 5 — Étude d'une transformation du plan complexe

$$1. \quad (a) \quad \text{Pour } x \geq 0, (1 - x)^2 \geq 0 \implies 1 + x^2 \geq 2x \implies \varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2} \leq 1. \text{ D'où } \varphi(\mathbf{x}) \in [0, 1].$$

$$(b) \quad \text{Pour } x > 0, \varphi(1/x) = \frac{2/x}{1+1/x^2} = \frac{2x}{x^2+1} = \varphi(\mathbf{x}).$$

$$(c) \quad \varphi'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}. \quad \varphi \text{ est strictement croissante sur } [0, 1] \text{ et strictement décroissante sur } [1, +\infty[, \text{ avec un maximum } \varphi(1) = 1.$$

$$(d) \quad \varphi(x) = b \iff bx^2 - 2x + b = 0.$$

$$\bullet \text{ Si } b = 0, x = 0.$$

$$\bullet \text{ Si } b \in]0, 1], \Delta = 4(1 - b^2) \geq 0 \implies \mathbf{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1-b^2}}{b}.$$

$$2. \quad (a) \quad f(-1+i) = \frac{2(-1+i)}{1+2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathbf{i}.$$

$$f\left(\frac{-1+i}{2}\right) = \frac{-1+i}{1+1/2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathbf{i}.$$

$$(b) \quad f(z) = z \iff \frac{2z}{1+|z|^2} = z \iff z = 0 \text{ ou } |z| = 1.$$

L'ensemble des points invariants est **l'origine O union le cercle unité**.

$$3. \quad (a) \quad f(z) = \frac{2\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2} + \mathbf{i} \frac{2\mathbf{y}}{1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}.$$

- (b) $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{3} \iff \frac{2x}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{3} \iff (x-3)^2 + y^2 = 8.$
 $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre $(3,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
- (c) $\operatorname{Im}(f(z)) = \frac{1}{3} \iff \frac{2y}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{3} \iff x^2 + (y-3)^2 = 8.$
 $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $(0,3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
4. (a) Pour $z = re^{i\theta}$, $f(z) = \varphi(r)e^{i\theta}$.
Module : $|f(z)| = \varphi(r)$, Argument : $\arg(f(z)) \equiv \theta [2\pi]$.
(b) D'après 1.(a), $\varphi(r) \leq 1 \implies \mathbf{OM}' \leq 1$.
5. (a) Si $|Z| > 1$, comme $|f(z)| \leq 1$, l'équation $F(M) = N$ n'admet aucune solution.
- (b) Si $|Z| = 1$ ou $Z = 0$, l'équation $\varphi(r) = |Z|$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. L'équation $F(M) = N$ a une unique solution.
- (c) Si $0 < |Z| < 1$, l'équation $\varphi(r) = |Z|$ a exactement deux solutions r_1 et $r_2 = 1/r_1$.
Les deux points solutions sont situés sur la même demi-droite issue de O et sont inverses par rapport au cercle unité ($OM_1 \cdot OM_2 = 1$).