

PCSI / PTSI - vrai DS n°0005

Mathématiques — 6 Octobre 2025, Quelquepart.

Nombres complexes, Trigonométrie et Sommes (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : ***

Exercice 1 — Questions de cours & applications directes

1. Rappeler les formules d'Euler et de Moivre.
2. Simplifier $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.
3. On identifie $\mathbb{C}$ au plan complexe muni d'un repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z + 1|$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + (5 + i) = 0$.
5. Linéariser $\cos^3(x) \sin^4(x)$.
6. Écrire $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lfloor \sqrt{9n^2 + 1} \rfloor$ est un multiple de 3 (on pourra commencer par encadrer $9n^2 + 1$ par deux carrés parfaits consécutifs).

Exercice 2 — Exercices indépendants sur les complexes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Écrire $1 - i$ sous forme trigonométrique.
 - (b) En déduire la valeur de $(1 - i)^{4n}$.
2. Soit z un nombre complexe de module 1 avec $z \neq 1$. Montrer, en utilisant la propriété de l'angle moitié, que le nombre $i \frac{1+z}{1-z}$ est réel.
3. On pose $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
 - (a) Calculer u^2 et donner sa forme trigonométrique.
 - (b) En déduire le module et un argument de u .
4.
 - (a) Donner les solutions de l'équation $u^4 = -4$ sous forme algébrique et trigonométrique.
 - (b) En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation :

$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0$$

Exercice 3 — Sommes complexes et racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, $A = \sum_{k=1}^n k\omega^k$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $S_p = \sum_{k=1}^n \omega^{kp}$.

1. Calculer S_p (on distinguera deux cas : p est un multiple de n ou pas).
2.
 - (a) Montrer que $A - \omega A = S_1 - n\omega$.
 - (b) En déduire que $A = -\frac{n\omega}{1 - \omega}$.

3. Montrer, en utilisant le binôme de Newton, que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n = \sum_{j=0}^n S_{n-j} \binom{n}{j} z^j$$

En déduire alors que :

$$\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n = n(1 + z^n)$$

Exercice 4 — Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Montrer que β est de partie réelle négative.
2. Montrer que $\alpha + \beta = -1$ et que $\alpha\beta = -1$.
3. En déduire les valeurs de α et β (pensez aux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme de degré 2 puis utiliser la question 1).
4. Montrer que $\omega^4 = \bar{\omega}$, puis en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. Grâce aux angles associés, déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 5 — Étude d'une transformation du plan complexe

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{2z}{1 + z\bar{z}}$.

On désigne par F l'application du plan complexe dans lui-même qui au point M d'afixe z associe le point M' d'afixe $f(z)$.

1. Soit φ la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \in [0, 1]$.
 - (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \varphi(1/x)$.
 - (c) Étudier les variations de φ .
 - (d) Soit b un réel de l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer les solutions de l'équation $\varphi(x) = b$.
2. (a) Calculer $f(-1 + i)$ et $f\left(\frac{-1 + i}{2}\right)$. Placer les points correspondants dans le plan complexe.
 - (b) Déterminer et construire l'ensemble des points invariants par F (autrement dit, déterminer les points M d'afixe z tels que $f(z) = z$).
3. (a) Soit $z = x + iy$ la forme algébrique de z . Écrire $f(z)$ sous forme algébrique.
 - (b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M d'afixe z tels que $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{3}$.
 - (c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M d'afixe z tels que $\operatorname{Im}(f(z)) = \frac{1}{3}$.
4. (a) Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ . Calculer en fonction de r et θ le module et un argument de $f(z)$.
 - (b) Montrer que pour tout point M du plan, on a $OM' \leq 1$.
5. Soit N un point d'afixe Z .
 - (a) Montrer que si $|Z| > 1$, alors il n'existe pas de point M tel que $F(M) = N$.
 - (b) Montrer que si $|Z| = 1$ ou $Z = 0$, alors l'équation $F(M) = N$ admet une unique solution.
 - (c) Montrer que si $0 < |Z| < 1$, alors l'équation $F(M) = N$ admet exactement deux solutions. Que sait-on de la disposition de ces deux points solutions ?