

Exercice 1 — Questions diverses(Q1) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(Q2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\lfloor 2\sqrt{n(n+1)} \right\rfloor = 2n$$

(Q3) Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

(Q4) Compléter sans démonstration les formules suivantes :

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k = \dots$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \dots$$

$$(c) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \dots$$

(Q5) Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer l'égalité suivante, établissant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

(Q6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists a, b \in \mathbb{N} : \quad (2 + \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$$

(Q7) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n$$

(Q8) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

(Q9) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$$

Problème — Étude des $\cos(n\theta)$ Dans tout le problème, on fixe un réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.On cherche à établir différents résultats sur la suite $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I — Divergence de la suite

Dans cette partie, on souhaite démontrer que la suite ne converge pas.

On raisonne par l'absurde et on suppose que, pour une certaine valeur $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\cos(n\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

(I.1) Montrer que :

$$\sin(n\theta) \sin(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(I.2) En déduire que :

$$\sin(n\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(I.3) En s'inspirant de la méthode des questions précédentes, montrer que :

$$\cos(n\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(I.4) En déduire une contradiction.

Partie II — Convergence au sens de Cesàro

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose μ_n la moyenne des premiers termes de la suite :

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$$

Dans cette partie, on souhaite montrer que la suite converge « au sens de Cesàro » vers 0 :

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(II.1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(II.2) Montrer que :

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Partie III — Borne supérieure

(III.1) Montrer que :

$$\max\{\cos(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$$

(III.2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

(III.3) Dans cette question, on fixe un entier $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on pose $\alpha_k = k\theta - 2 \left\lfloor \frac{k\theta}{2\pi} \right\rfloor \pi$.

On remarque notamment que :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \alpha_k \equiv k\theta \pmod{2\pi}$$

(a) Montrer que, parmi $N+1$ réels dans $[0, 2\pi[$, il en existe au moins deux éloignés de $< \frac{2\pi}{N}$.

Indication : On pourra noter $x_1 \leq \dots \leq x_{N+1}$ ces réels écrits dans l'ordre croissant, raisonner par l'absurde et considérer $\sum_{k=1}^N (x_{k+1} - x_k)$.

(b) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \alpha_k \in [0, 2\pi[$$

(c) Montrer qu'il existe $k < \ell$ dans $\llbracket 0, N \rrbracket$ tels que :

$$|\alpha_k - \alpha_\ell| < \frac{2\pi}{N}$$

(d) Montrer que :

$$\exists n \in \llbracket 1, N \rrbracket : \quad \cos(n\theta) > 1 - \frac{2\pi^2}{N^2}$$

(III.4) Montrer que :

$$\sup\{\cos(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 1$$