

Série PCSI/PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0007

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Logique, Équations Trigonométriques, Bijection & Nombres de Catalan (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Questions indépendantes

1. (a) La contraposée de $\mathcal{A}$ est : $a > b \implies \exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon$.

Démontrons la contraposée : supposons $a > b$. En posant $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, on a $b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} < a$.

L'existence de cet ε prouve la contraposée.

Une assertion étant équivalente à sa contraposée, $\mathcal{A}$ est vraie.

- (b) La réciproque de $\mathcal{A}$ est : $a \leq b \implies (\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon)$.

Si $a \leq b$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leq b < b + \varepsilon$.

La réciproque de $\mathcal{A}$ est donc vraie.

2. Par télescopage sur l'indice j :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{i=1}^n i^2 \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \sum_{i=1}^n i^2 \left(1 - \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{i+1}$$

3. Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 4z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3y + 2z = a + 2 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 3y + 2z = 3 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

Le système est compatible si et seulement si $a + 2 = 3 \iff \mathbf{a = 1}$.

- Si $a \neq 1$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

- Si $a = 1$, le système se réduit à $3y + 2z = 3 \implies z = \frac{3-3y}{2}$. Puis $x = 2 - y - z = \frac{1+y}{2}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1+y}{2}, y, \frac{3-3y}{2} \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression conjuguée donne :

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \implies 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

On en déduit que $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n (2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}) = 2\sqrt{n}$$

5. Pour $x > 1$, $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1$, donc $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$. f est bien définie.

f est strictement décroissante comme composée de fonctions strictement décroissantes et croissantes.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

f réalise donc une **bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.**

Soient $x \in]1, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$:

$$y = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \iff y^2 = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \iff e^{y^2} = \frac{x+1}{x-1} \iff x = \frac{e^{y^2} + 1}{e^{y^2} - 1} = \coth\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

6. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cherchons $e(x) = a \cosh x + b \sinh x \in E$ et $g \in F$ tels que $f = e + g$.
 Comme $g(0) = 0$, $f(0) = e(0) = a$. Comme $g'(0) = 0$, $f'(0) = e'(0) = b$.
 Ainsi, l'unique couple candidat est $e(x) = f(0) \cosh x + f'(0) \sinh x$ et $g(x) = f(x) - e(x)$.
 On vérifie aisément que $e \in E$ et $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ donc $g \in F$.
Toute fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme $e + g$ avec $e \in E$ et $g \in F$.

7. (a) **Formule de Pascal** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

$$\text{Démonstration : } \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} [(n-k) + k] = \binom{n}{k}.$$

- (b) Par récurrence sur $n \geq k$: la formule est vraie pour $n = k$ ($\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$).

$$\text{Si } \sum_{p=k}^n \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ alors } \sum_{p=k}^{n+1} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} \text{ par Pascal.}$$

Exercice 2 — Équation trigonométrique et calculs d'angles

- Par linéarisation : $2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} [\cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right)] = \cos p + \cos q$.
- $-\sin(2x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. En posant $q = 2x + \frac{\pi}{2}$, $(E) \iff \cos(3x) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- $\bullet \cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{10} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$.
 - $\bullet \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff x \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} [\pi]$.
- $(E) \iff 2 \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.
 L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 Les solutions appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont $-\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{10}$.
- $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
- $(E) \iff 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \iff \cos x (4(1 - \sin^2 x) - 3 - 2 \sin x) = 0 \iff \cos x (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) = 0$.
- $x = \frac{\pi}{10}$ est solution de (E) et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$. Ainsi $4 \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 0$.
 En posant $X = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$, le discriminant de $4X^2 + 2X - 1 = 0$ vaut $\Delta = 20$, d'où $X = \frac{-2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.
 - $\bullet \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$.
 - $\bullet \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Exercice 3 — Étude d'une fonction comportant un logarithme

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = 0 \iff x = e^{-2}$.
 - $\bullet f$ est strictement décroissante sur $]0, e^{-2}]$ de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 2$ à $f(e^{-2}) = \ln 2 - 2e^{-1} \approx -0,03 < 0$.
 - $\bullet f$ est strictement croissante sur $[e^{-2}, +\infty[$ de $f(e^{-2})$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (a) f est continue et strictement croissante sur $[e^{-2}, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur $[\ln 2 - 2e^{-1}, +\infty[$.
 (b) $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \iff \sqrt{x} \ln x = -\ln 2 \iff f(x) = 0$.
 Sur $]0, e^{-2}]$, f s'annule exactement une fois car $f(e^{-2}) < 0 < \ln 2$.
 Sur $[e^{-2}, +\infty[$, f s'annule exactement une fois par le T.V.I.
 L'équation possède donc **exactement 2 solutions dans $\mathbb{R}_+^*$** .

3. (a) $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln 2 = -\frac{2 \ln n}{n} + \ln 2 = 0 \iff \ln(n^2) = \ln(2^n) \iff \mathbf{n^2 = 2^n}$.
 (b) Si $n^2 = 2^n$, alors n est une puissance de 2, donc $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). $(2p)^2 = 2^{2p} \iff 4p^2 = 4^p \iff p^2 = 2^{2p-2} = (2^{p-1})^2 \iff \mathbf{2^{p-1} = p}$.
 (c) $2^{p-1} = p$ est vérifiée pour $p = 1$ ($n = 2$) et $p = 2$ ($n = 4$).
 On en déduit les deux solutions de $x^{\sqrt{x}} = 1/2$: $x = \frac{1}{4}$ **et** $x = \frac{1}{16}$.
4. (a) Puisque $1/4 \in [e^{-2}, +\infty[$ et $f(1/4) = 0$, on a $f^{-1}(0) = \frac{1}{4}$.
 (b) $f'(1/4) = \frac{\ln(1/4) + 2}{2\sqrt{1/4}} = 2 - 2 \ln 2 \neq 0$.
 f^{-1} est donc dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1/4)} = \frac{1}{2(1 - \ln 2)}$.

Exercice 4 — Propriétés algébriques des nombres de Catalan

1. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$.
 $S_0 = a_0^2 = \mathbf{1}, S_1 = 2a_0a_1 = \mathbf{2}, S_2 = 2a_0a_2 + a_1^2 = \mathbf{5}$.
On remarque que $S_0 = a_1, S_1 = a_2$ **et** $S_2 = a_3$.
2. Par le changement d'indice $j = n - k$:

$$T_n = \sum_{j=0}^n (n-j)a_{n-j}a_j = nS_n - T_n \implies \mathbf{2T_n = nS_n}$$

3. $(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} = \mathbf{2(2n+1)a_n}$.
4. $T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)a_k a_{n+1-k} = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)a_k a_{n+1-k}$.
 En utilisant $(k+1)a_k = 2(2k-1)a_{k-1}$ et la question 2 :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{j=0}^n 2(2j+1)a_j a_{n-j} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n = \mathbf{a_{n+1} + 2(n+1)S_n}$$

Puisque $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}S_{n+1}$, on a bien $T_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+3}{2}S_{n+1}$.

5. Démontrons $S_n = a_{n+1}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation** : $S_0 = 1 = a_1$, vrai pour $n = 0$.
- **Hérédité** : Supposons $S_n = a_{n+1}$. D'après la question 4 : $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$. Ainsi $S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}$ d'après la relation du 3.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = a_{n+1}$.

6. $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$. Si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, alors $a_{n+1} = S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$.

Par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$.