

Série PCSI/PTSI - vrai DS n°0007

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Logique, Équations Trigonométriques, Bijection & Nombres de Catalan (3h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★○

Exercice 1 — Questions indépendantes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion $\mathcal{A} : (\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \implies a \leq b$.

(a) Écrire la transposée (contraposée) de $\mathcal{A}$. En déduire que $\mathcal{A}$ est vraie.

(b) Écrire la réciproque de $\mathcal{A}$. La réciproque de $\mathcal{A}$ est-elle vraie ?

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$.

3. Soit a un paramètre réel. Résoudre le système suivant d'inconnues x, y, z réelles :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 4z = 7 \end{cases}$$

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$.

5. Montrer que la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}$ est bijective de $]1, +\infty[$ sur un ensemble à préciser et donner l'expression de sa réciproque.

6. Soient les ensembles :

$$E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cosh x + b \sinh x\}$$

et

$$F = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une fonction de E et d'une fonction de F .

7. (a) **Question de cours** : énoncer et démontrer la formule de Pascal.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que $\sum_{p=k}^n \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 2 — Équation trigonométrique et calculs d'angles

On considère l'équation $(E) : \cos(3x) = \sin(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver un réel q dépendant de x tel que $-\sin(2x) = \cos q$. Réécrire alors (E) sous la forme $\cos p + \cos q = 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations :

$$\cos \left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Lesquelles appartiennent à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$?
5. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
6. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\cos x (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) = 0$.
7. Montrer alors que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. En déduire une expression la plus simple possible de $\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 3 — Étude d'une fonction comportant un logarithme

Dans cet exercice, on donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $e^{-1} \approx 0,36$. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x} \ln x + \ln 2$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Montrer que f induit une bijection de $[e^{-2}, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. Dans la suite, on notera f^{-1} la réciproque de cette bijection.
(b) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ à l'équation $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer : $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \iff n^2 = 2^n$.
(b) On suppose que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$ et $2^{p-1} = p$.
(c) Donner deux valeurs de $p \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $2^{p-1} = p$. En déduire les solutions de $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.
4. (a) Calculer $f^{-1}(0)$.
(b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 4 — Propriétés algébriques des nombres de Catalan

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k}$.

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 ainsi que S_0, S_1 et S_2 . Que remarque-t-on ?
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^n (n-k) a_k a_{n-k}$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2T_n = nS_n$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n = \frac{n+3}{2} S_{n+1}$$

5. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = a_{n+1}$.
6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{N}$.