

Série PCSI/PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0008

Mathématiques - Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Trigonométrie, Étude de Fonctions & Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

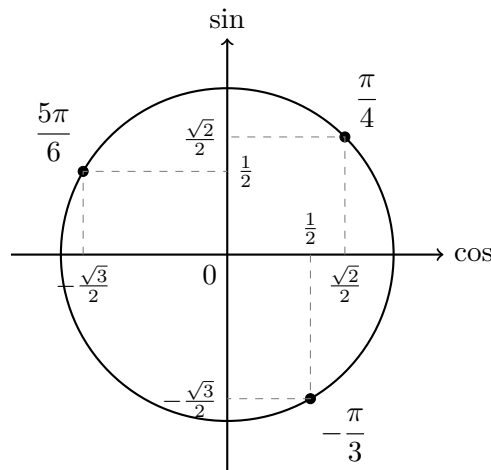
maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Questions de cours

1. **Définition :** Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est une fonction paire si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

2. Cercle trigonométrique :



3. Identifions les fonctions à l'aide des formules d'angle associé :

- $f_1(x) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$. Pour $x = 0$, $f_1(0) = -1$. Seule la courbe **A** vérifie $f(0) = -1$.
- $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$. Pour $x = 0$, $f_2(0) = 1$. Seule la courbe **B** vérifie $f(0) = 1$.
- $f_3(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$. Pour $x = 0$, $f_3(0) = 0$ et $f'_3(0) = 1 > 0$. Cela correspond à la courbe **C**.

Exercice 2 — Étude de fonctions et approximation de $\cos x$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0 \implies 12 + x^2 \geq 12 > 0$. Le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de ϕ est bien $\mathbb{R}$.

2. Calculons les images en $x = 1/2$:

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12 - 5(1/4)}{12 + 1/4} = \frac{43/4}{49/4} = \frac{43}{49} \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{6(1/4)}{12 + 1/4} = 1 - \frac{6}{49} = \frac{43}{49}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $\phi(-x) = \frac{12 - 5(-x)^2}{12 + (-x)^2} = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} = \phi(x)$.

La fonction ϕ est donc paire.

4. Du fait de la parité, on peut restreindre le domaine d'étude de ϕ à $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

La courbe représentative $\mathcal{C}_\phi$ admet l'axe des ordonnées (Oy) comme **axe de symétrie**.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12+x^2} = \frac{(12+x^2) - 6x^2}{12+x^2} = \frac{12-5x^2}{12+x^2} = \phi(x)$$

Les fonctions ϕ et ψ sont identiques sur $\mathbb{R}$.

6. En dérivant sous la forme $\psi(x) = 1 - 6 \cdot \frac{x^2}{12+x^2}$:

$$\phi'(x) = -6 \times \frac{2x(12+x^2) - x^2(2x)}{(12+x^2)^2} = -6 \times \frac{24x + 2x^3 - 2x^3}{(12+x^2)^2} = -\frac{144x}{(12+x^2)^2}$$

7. Le signe de $\phi'(x)$ dépend uniquement de celui de $-x$:

- $\phi'(x) > 0$ sur $] -\infty, 0[$, donc ϕ est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$.
- $\phi'(0) = 0$ et $\phi(0) = \frac{12}{12} = 1$.
- $\phi'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$, donc ϕ est strictly décroissante sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variations : ϕ croît de -5 à 1 en $x = 0$, puis décroît de 1 à -5 .

8. $\phi(x) = 0 \iff 12 - 5x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{12}{5} \iff x = \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx \pm 1,54$.

9. La courbe $\mathcal{C}_\phi$ épouse de manière extrêmement fidèle la courbe du cosinus sur $[-\pi, \pi]$ (il s'agit de l'approximant de Padé de $\cos x$). Elles coïncident en 0 ($\phi(0) = \cos(0) = 1$) et leurs variations/zéros sont quasi identiques.

10. D'après l'étude des variations, $\phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = -5$ sans jamais atteindre ou descendre sous -5 . Ainsi $-5 < \phi(x) \leq 1$.

ϕ est majorée par 1, minorée par -5 , et donc bornée sur $\mathbb{R}$.

11. $f(x) = \frac{2\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+5}}$ est définie si et seulement si $3-3x \geq 0$ et $x+5 > 0$.

Ce qui équivaut à $x \leq 1$ et $x > -5$. D'où $\mathcal{D}_f =]-5, 1]$.

12. Soit $x \in]-5, 1]$. Posons $Y = f(x)^2 = \frac{4(3-3x)}{x+5} = \frac{12-12x}{x+5}$. Alors :

$$\phi(f(x)) = \frac{12-5Y}{12+Y} = \frac{12-5\left(\frac{12-12x}{x+5}\right)}{12+\left(\frac{12-12x}{x+5}\right)} = \frac{12(x+5) - 5(12-12x)}{12(x+5) + (12-12x)} = \frac{72x}{72} = x$$

Exercice 3 — Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Partie 1 — Questions intermédiaires

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

(b) $\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\sin x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

(c) $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x = 2\sin x\cos^2 x + (1-2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Partie 2 — Première méthode

2. Avec $\theta = \frac{\pi}{5}$, $2025 \times \theta = \frac{2025\pi}{5} = 405\pi$. D'où $\cos(2025\theta) = \cos(405\pi) = -1$.

3. On a $3\theta + 2\theta = \pi \implies 3\theta = \pi - 2\theta \implies \cos(3\theta) = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos(2\theta)$.

De même, $4\theta + \theta = \pi \implies 4\theta = \pi - \theta \implies \cos(4\theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$.

4. En injectant les formules de la partie 1 dans $\cos(3\theta) + \cos(2\theta) = 0$:

$$(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + (2\cos^2\theta - 1) = 0 \iff 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$$

5. $(x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 4x^3 - 2x^2 - x + 4x^2 - 2x - 1 = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. L'égalité est vérifiée.

6. Posons $X = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. D'après les questions 4 et 5, $(X+1)(4X^2 - 2X - 1) = 0$.

Comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $X > 0$, donc $X \neq -1$.

Par suite, $4X^2 - 2X - 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4(4)(-1) = 20$.

Ses racines sont $X_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ et $X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} > 0$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, on conclut : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

7. Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$8. \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sin(\pi/5)}{\cos(\pi/5)} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Partie 3 — Deuxième méthode

$$9. \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \frac{x}{2} \in \pi\mathbb{Z} \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$10. (2\cos\varphi + 1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\cos\varphi\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right).$$

11. Pour $\varphi \in]0, 2\pi[$, $\sin(\varphi/2) \neq 0$. En transformant les produits en sommes :

$$[\cos(a) + \cos(a + \varphi) + \cos(a + 2\varphi)]\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(a + \frac{5\varphi}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{\varphi}{2}\right) \right] = \cos(a + \varphi)\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$

En divisant par $\sin(\varphi/2) \neq 0$, on obtient bien l'identité.

$$12. \text{ Avec } a = \theta = \frac{\pi}{5} \text{ et } \varphi = 2\theta = \frac{2\pi}{5} : \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) = \cos(3\theta) \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Comme $\cos(5\theta) = \cos(\pi) = -1$ et $\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\pi - 2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = 2\cos\theta$, on a :

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) - 1 = 2\cos(\theta)\cos(3\theta) = \cos(4\theta) + \cos(2\theta) = -\cos(\theta) - \cos(3\theta)$$

$$\text{D'où } 2(\cos(\theta) + \cos(3\theta)) = 1 \implies \cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}.$$

$$13. \text{ Par la formule de linéarisation : } \cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta) + \cos(2\theta)}{2}.$$

$$14. \text{ D'après la question 3, } \cos(4\theta) = -\cos(\theta) \text{ et } \cos(2\theta) = -\cos(3\theta).$$

$$\text{D'où } \cos(4\theta) + \cos(2\theta) = -(\cos\theta + \cos3\theta) = -\frac{1}{2}. \text{ On conclut : } \cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}.$$

$$15. \cos(\theta) \text{ et } \cos(3\theta) \text{ ont pour somme } S = \frac{1}{2} \text{ et pour produit } P = -\frac{1}{4}.$$

Ils sont donc les deux solutions de l'équation du second degré : $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0 \iff 4X^2 - 2X - 1 = 0$.

$$16. \text{ Comme } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0, \text{ elle correspond à la racine positive de cette équation : } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$