

Série PCSI/PTSI - vrai DS n°0008

Mathématiques - Septembre 2026, Quelquepart.

Trigonométrie, Étude de Fonctions & Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★○○

Abstraction & Raisonnement : ★○○

Exercice 1 — Questions de cours

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Recopier et compléter la définition d'une fonction paire donnée ci-dessous :

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est une fonction paire si...

2. Tracer sur votre copie un cercle trigonométrique, puis y placer les angles :

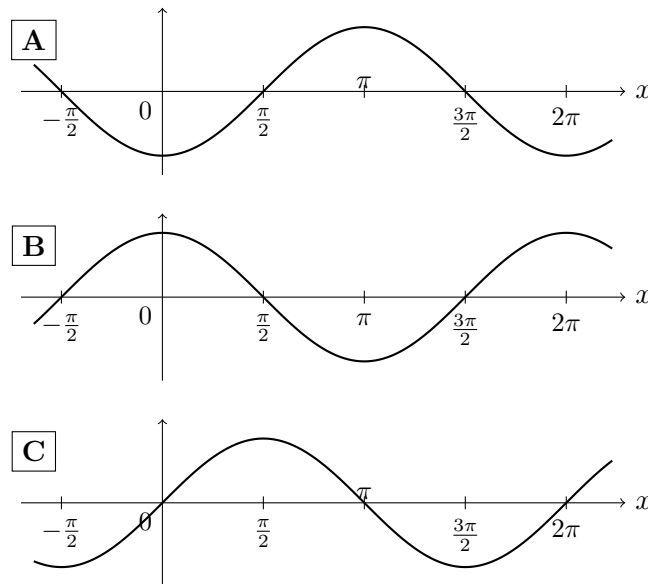
$$\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{6}$$

en indiquant les valeurs de cosinus et sinus associées pour chaque angle.

3. Pour chacune des trois fonctions suivantes :

$$\text{a) } f_1 : x \mapsto \cos(x + \pi) \quad \text{b) } f_2 : x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{c) } f_3 : x \mapsto -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

reconnaître sa courbe représentative parmi les propositions ci-dessous. Justifier.



Exercice 2 — Étude de fonctions et approximation de $\cos x$

Adapté d'un sujet de concours de la banque PT.

On considère les fonctions ϕ et ψ , qui, à tout réel x , associent :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction ϕ est $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Étudier la parité de la fonction ϕ .
4. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude de la fonction ϕ , et pour sa courbe représentative ?
5. Comparer, pour tout réel x , $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
6. Déterminer pour tout réel x la valeur de $\phi'(x)$.
7. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$. On admet que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = -5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -5$$

8. Résoudre l'équation $\phi(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
9. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54$$

Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?

10. La fonction ϕ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
11. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{2\sqrt{3-3x}}{\sqrt{x+5}}$$

On note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Que vaut $\mathcal{D}_f$?

12. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\phi(f(x)) = x$.

Exercice 3 — Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Soit $\theta = \frac{\pi}{5}$. Le but de cet exercice est principalement de déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie 1 — Quelques questions intermédiaires

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
 - (b) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
 - (c) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.

Partie 2 — Première méthode

2. Calculer $\cos(2025 \times \theta)$.
3. Justifier que $\cos(3\theta) = -\cos(2\theta)$ et que $\cos(4\theta) = -\cos(\theta)$.
4. En déduire, grâce à la première partie, une équation vérifiée par $\cos(\theta)$.
5. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)$$

6. En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

7. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
8. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie 3 — Deuxième méthode

9. Résoudre l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
10. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$(2\cos(\varphi) + 1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$

11. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in]0, 2\pi[$:

$$\cos(a) + \cos(a + \varphi) + \cos(a + 2\varphi) = \cos(a + \varphi) \frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

12. En prenant $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta$, montrer que $\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}$.

13. Justifier que :

$$\cos(\theta) \cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta) + \cos(2\theta)}{2}$$

14. À l'aide de la question 3, en déduire que $\cos(\theta) \cos(3\theta) = -\frac{1}{4}$.

15. Déduire des questions précédentes une équation du second degré vérifiée par $\cos(\theta)$.

16. Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.