

Série PCSI / PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0009

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Inversion de Pascal, Dérangements & Inégalité de Winkler (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Logique et carrés d'entiers

1. La phrase s'écrit formellement :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{k}^2 \quad (\text{ou encore } \neg(\exists k \in \mathbb{N}, n = k^2))$$

2. La proposition $\mathcal{P}$ s'écrit :

$$\mathcal{P} : (\exists \mathbf{k} \in \mathbb{N}, \mathbf{n} = \mathbf{k}^2) \implies (\forall \mathbf{m} \in \mathbb{N}, 2\mathbf{n} \neq \mathbf{m}^2)$$

3. La contraposée de $\mathcal{P}$ est :

$$(\exists \mathbf{m} \in \mathbb{N}, 2\mathbf{n} = \mathbf{m}^2) \implies (\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}, \mathbf{n} \neq \mathbf{k}^2)$$

Démonstration : Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $2n = m^2$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k^2$.

Alors $m^2 = 2k^2$, d'où $\left(\frac{m}{k}\right)^2 = 2$, ce qui implique que $\sqrt{2} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$.

Or, il est connu que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (si $\sqrt{2} = p/q$ sous forme irréductible, $p^2 = 2q^2 \implies p$ pair $\implies q$ pair, contradiction).

Par conséquent, il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k^2$. La contraposée est donc démontrée.

4. Une proposition étant logiquement équivalente à sa contraposée, **la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**

Exercice 2 — Formule d'inversion de Pascal et dérangements

1. a. Pour tout $q \in \llbracket 0, n-k \rrbracket$, exprimons les coefficients binomiaux en factorielles :

$$\binom{n}{q} \binom{n-q}{k} = \frac{n!}{q!(n-q)!} \times \frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!} = \frac{n!}{q!k!(n-k-q)!}$$

De même :

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{q} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{q!(n-k-q)!} = \frac{n!}{q!k!(n-k-q)!}$$

On a donc bien $\binom{n}{q} \binom{n-q}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{q}$.

- b. Réécrivons $\mu(k, n)$ à l'aide du résultat précédent :

$$\mu(k, n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{k} \binom{n-k}{q} = \binom{n}{k} \sum_{q=0}^{n-k} \binom{n-k}{q} (-1)^q 1^{(n-k)-q}$$

D'après la formule du binôme de Newton, la somme vaut $(1-1)^{n-k} = 0^{n-k}$.

- Si $k < n$, $n-k > 0$, donc $0^{n-k} = 0$, d'où $\mu(k, n) = 0$.

- Si $k = n$, la somme se réduit au seul terme $q = 0$, donc $\mu(n, n) = \binom{n}{n}(-1)^0 \binom{0}{0} = 1$.

2. Exprimons la somme du membre de droite de l'inégalité à démontrer :

$$\sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_k \right)$$

En intervertissant les deux sommes (domaine $\{(k, p) \mid 0 \leq k \leq p \leq n\}$) :

$$= \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} \right)$$

Effectuons le changement d'indice $q = n - p$ dans la somme interne :

$$\begin{aligned} \sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} &= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{n-q} \binom{n-q}{k} \\ &= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{k} = \mu(k, n) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p = \sum_{k=0}^n a_k \mu(k, n) = a_n \mu(n, n) = a_n$$

On a ainsi établi la **formule d'inversion de Pascal** : $a_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p$.

3. a. Calculons de proche en proche les termes de a_n :

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 1 \times a_0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$
- $a_2 = 2 \times a_1 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$
- $a_3 = 3 \times a_2 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$
- $a_4 = 4 \times a_3 + (-1)^4 = 8 + 1 = 9$
- $a_5 = 5 \times a_4 + (-1)^5 = 45 - 1 = 44$

Calculons ensuite les termes de $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$:

- $b_0 = a_0 = 1$
- $b_1 = a_0 + a_1 = 1 + 0 = 1$
- $b_2 = a_0 + 2a_1 + a_2 = 1 + 0 + 1 = 2$
- $b_3 = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3 = 1 + 0 + 3 + 2 = 6$
- $b_4 = a_0 + 4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + a_4 = 1 + 0 + 6 + 8 + 9 = 24$
- $b_5 = a_0 + 5a_1 + 10a_2 + 10a_3 + 5a_4 + a_5 = 1 + 10 + 20 + 45 + 44 = 120$

b. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = n!$.

c. Démontrons la conjecture. Pour tout $n \geq 1$:

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (ka_{k-1} + (-1)^k)$$

Or $\binom{n}{k}k = n \binom{n-1}{k-1}$ et $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n - \binom{n}{0}(-1)^0 = -1$. D'où :

$$b_n = 1 + n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} a_{k-1} - 1 = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a_j = nb_{n-1}$$

La suite (b_n) vérifie $b_0 = 1$ et $b_n = nb_{n-1}$. Par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = n!$.

d. En appliquant la formule d'inversion de Pascal obtenue en question 2 :

$$a_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p! = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \frac{n!}{(n-p)! p!} p! = n! \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!}$$

En effectuant le changement d'indice $k = n - p$, on conclut :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{a}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}! \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \frac{(-1)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}$$

Exercice 3 — Inégalité de Winkler

Partie I — Préliminaires

1. L'inégalité classique $\sin(x) < x < \tan(x)$ sur $]0, \pi/2[$ s'obtient par l'étude des fonctions $x \mapsto x - \sin x$ et $x \mapsto \tan x - x$ dont les dérivées $1 - \cos x$ et $\tan^2 x$ sont strictement positives sur $]0, \pi/2[$.
2. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned} 2 \cos(2x) + 2 \tan^2(x) - 2 &= 2(\cos(2x) - 1) + 2 \tan^2(x) \\ &= -4 \sin^2(x) + 2 \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 2 \sin^2(x) \frac{1 - 2 \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = -2 \tan^2(x) \cos(2x) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(1 + \tan^2(x)) \tan(x) \sin(4x) &= -\frac{1}{2 \cos^2(x)} \tan(x) (2 \sin(2x) \cos(2x)) \\ &= -\frac{1}{\cos^2(x)} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} (2 \sin(x) \cos(x)) \cos(2x) \\ &= -2 \tan^2(x) \cos(2x) \end{aligned}$$

L'égalité est bien vérifiée.

3. Par équivalent usuel en 0, $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

Partie II — Étude de la première fonction

1. f est deux fois dérivable sur $]0, \pi/2[$ comme somme et produit de fonctions usuelles deux fois dérivables.

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \tan(x) + x(1 + \tan^2(x)) - 4x = \sin(2x) + \tan(x) + x(1 + \tan^2(x)) - 4x$$

En dérivant une seconde fois :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cos(2x) + (1 + \tan^2(x)) + (1 + \tan^2(x)) + 2x \tan(x)(1 + \tan^2(x)) - 4 \\ &= 2 \cos(2x) + 2 \tan^2(x) - 2 + 2x \tan(x)(1 + \tan^2(x)) \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question I.2 :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2}(1 + \tan^2(x)) \tan(x) \sin(4x) + 2x \tan(x)(1 + \tan^2(x)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\mathbf{x})) \tan(\mathbf{x})(4\mathbf{x} - \sin(4\mathbf{x})) \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in]0, \pi/2[$:

- $1 + \tan^2(x) > 0$ et $\tan(x) > 0$.
- Si $4x \geq \pi$, $4x > \pi > 1 \geq \sin(4x)$, donc $4x - \sin(4x) > 0$.
- Si $4x \in]0, \pi[$, d'après I.1, $\sin(4x) < 4x$, d'où $4x - \sin(4x) > 0$.

On en déduit que $f''(x) > 0$ sur $]0, \pi/2[$.

f' est strictement croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $]0, \pi/2[$.

f est strictement croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\forall x \in]0, \pi/2[$, $f(x) > 0$.

3. Puisque $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$:

$$\sin^2(x) + x \tan(x) - 2x^2 > 0 \implies \frac{\sin^2(x)}{x^2} + \frac{\tan(x)}{x} > 2 \iff \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2$$

4. Par équivalents usuels en 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} \right] = 1^2 + 1 = 2$.

La fonction étant strictly supérieure à 2 sur $]0, \pi/2[$ et tendant vers 2 en 0^+ , **2 est le meilleur minorant (l'infimum) de la fonction sur $]0, \pi/2[$.**

Partie III — Étude de la seconde fonction

1. g est dérivable sur $]0, \pi/2[$ comme combinaison de fonctions dérivables. Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \frac{x}{\sin x} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\tan x - x(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x} \\ &= \frac{x \sin x - 2x^2 \cos x + \sin^2 x \cos x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

En factorisant par $\frac{x^2 \cos x}{\sin^3 x}$:

$$g'(x) = \frac{x^2 \cos x}{\sin^3 x} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\tan x}{x} - 2 \right)$$

En posant $h(x) = \frac{x^2 \cos x}{\sin^3 x} = \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cot(x)$, on a bien la forme souhaitée.

2. Pour tout $x \in]0, \pi/2[$:

- $h(x) > 0$ car $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$.
- D'après la partie II, $\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} - 2 > 0$.

On en déduit que $g'(x) > 0$ sur $]0, \pi/2[$, donc g est strictement croissante.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1^2 + 1 - 2 = 0$, $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$.

D'où l'inégalité : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^2 + \frac{x}{\tan(x)} > 2$.