

Série PTSI/PCSI - vrai DS n°0009

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Inversion de Pascal, Dérangements & Inégalité de Winkler (3h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : ***

Exercice 1 — Logique et carrés d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire sous forme de proposition logique la phrase : « n n'est pas le carré d'un entier ».
2. Écrire sous forme de proposition logique la phrase : « si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier ». On notera $\mathcal{P}$ cette proposition logique.
3. Écrire et prouver la contraposée de $\mathcal{P}$.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 — Formule d'inversion de Pascal et dérangements

1. Soient k, n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On pose :

$$\mu(k, n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{k}$$

- a. Montrer que pour tout $q \in \llbracket 0, n-k \rrbracket$:

$$\binom{n}{q} \binom{n-q}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{q}$$

- b. En déduire que $\mu(k, n) = 0$ si $k < n$ et $\mu(k, n) = 1$ si $k = n$.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On définit alors la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

Déduire de la question précédente la **formule d'inversion de Pascal** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p$$

3. On pose dans cette question :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = na_{n-1} + (-1)^n$$

- a. Calculer $a_0, a_1, \dots, a_5$ puis $b_0, b_1, \dots, b_5$.
- b. Conjecturer une expression générale de b_n .
- c. Démontrer cette conjecture.
- d. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Exercice 3 — Inégalité de Winkler

Partie I — Préliminaires

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) < x < \tan(x)$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 2 \cos(2x) + 2 \tan^2(x) - 2 = -\frac{1}{2}(1 + \tan^2(x)) \tan(x) \sin(4x)$$

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(x)}{x}$.

Partie II — Étude de la première fonction

On pose :

$$f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin^2(x) + x \tan(x) - 2x^2$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable et montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f''(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x)) \tan(x)(4x - \sin(4x))$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) > 0$$

3. En déduire l'inégalité de Winkler :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2$$

4. Montrer que 2 est le meilleur minorant de la fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Partie III — Étude de la seconde fonction

On pose :

$$g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 + \frac{x}{\tan(x)} - 2$$

1. Justifier que g est dérivable et déterminer une fonction simple h telle que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) = \left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} - 2\right) \times h(x)$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 + \frac{x}{\tan(x)} > 2$$