

Série PCSI / PTSI - CORRIGÉ : vrai DS n°0010

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Trigonométrie, Analyse, Étude de $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$ & Suites Implicites (3h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Exercice 1 — Questions indépendantes

1. i) $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
ii) $\tan$ est **impaire** ($\tan(-x) = -\tan(x)$) et **strict. croiss.** sur chaque intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.
iii) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
iv) $\tan(0) = 0$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ (ou $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$).
v) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty$.
2. (a) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.
(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies f(x) > f(y)$.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(a)$.
(d) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$).
3. $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \cosh(2x)$.
4. En utilisant $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$:

$$\int_0^{\pi/3} \cos(t) \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (\cos(3t) + \cos(t)) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(3t)}{3} + \sin(t) \right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. $\sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = (1 + \cos^2 \theta)^2$.
Comme $1 + \cos^2 \theta > 0$, on a bien $\sqrt{\sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta} = 1 + \cos^2 \theta$.
Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = \sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta = (1 + \cos^2 \theta)^2$.
Les racines sont $x_1 = \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos^2 \theta)}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{\sin^2 \theta - (1 + \cos^2 \theta)}{2} = -\cos^2 \theta$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1, -\cos^2 \theta\}$.

6. Pour $x > 1$, $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln(x^2)}\right) = \exp\left(\frac{\ln x}{2 \ln x}\right) = \exp(1/2) = \sqrt{e}$.
Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{e}$.

7. (a) $\sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
(b) $\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{3^{3k+2n}}{2^{k-1}} = 2 \cdot 3^{2n} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{27}{2}\right)^k = -\frac{54}{29} \cdot 3^{2n} \left(1 - \left(-\frac{27}{2}\right)^n\right)$.
(c) Par télescopage : $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(n-1)(3n+2)}{2n(n+1)}$.

Exercice 2 — Forme $r \cos(2x - \varphi)$

$$1. \cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) \right) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

On a donc $r = \sqrt{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$2. \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{4} &\equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \iff x \equiv \frac{5\pi}{24} [\pi] \\ 2x - \frac{\pi}{4} &\equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{24} [\pi] \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{24} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3. \text{ Dans } [0, 2\pi], \text{ les solutions sont } \mathcal{S}_{[0, 2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{29\pi}{24} \right\}.$$

Exercice 3 — Vrai / Faux

- FAUX.** Contre-exemple : $u_n = n$ est croissante mais tend vers $+\infty$.
- VRAI.** Pour tout $x \geq 0$, $y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ vérifie $y^2 = x$.
- FAUX.** Si un tel y existait, y^2 devrait valoir simultanément 0 (pour $x = 0$) et 1 (pour $x = 1$), ce qui est impossible.
- FAUX.** Pour $x, y > 0$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$. L'égalité imposerait $(x+y)^2 = xy \iff x^2 + xy + y^2 = 0$, impossible pour des réels strictement positifs.
- VRAI.** $\Delta = b^2 - 4ac$. Comme $b^2 \geq 0$ et $ac < 0 \implies -4ac > 0$, on a $\Delta > 0$: le trinôme a toujours deux racines réelles distinctes.
- VRAI.** Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0 \iff x^2 = -c/a$. Si $-c/a > 0$, les racines sont $\pm\sqrt{-c/a}$, qui sont bien opposées.
- FAUX.** Un trinôme garde un signe strictement positif sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$ et $\Delta < 0$.

Exercice 4 — Étude de fonction avec puissance rationnelle

- $f(x) = \frac{x}{(1+x)^{1/4}}$ est définie si et seulement si $1+x > 0 \iff x > -1$. $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x)^{1/4} = 0^+$, d'où $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.
 - $f(x) = \frac{x}{(1+x)^{1/4}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^{1/4}} = x^{3/4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{(1+x)^{1/4} - x \cdot \frac{1}{4}(1+x)^{-3/4}}{(1+x)^{1/2}} = \frac{(1+x) - \frac{1}{4}x}{(1+x)^{5/4}} = \frac{4+3x}{4(1+x)^{5/4}}$$

Pour $x > -1$, $4+3x > 1 > 0$ et $(1+x)^{5/4} > 0$. Ainsi $f'(x) > 0$.
 f est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 5 — Étude de la fonction $f(x) = \ln(\exp(x) - \exp(-x))$

1. $f(x)$ est définie ssi $e^x - e^{-x} > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff x > 0$. $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
2. $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \coth(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. f est strictement croissante.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - e^{-x}) = 0^+ \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. $f(x) - x = \ln(e^x(1 - e^{-2x})) - x = \ln(1 - e^{-2x})$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \ln(1) = 0$. La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
5. f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, réalisant une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Par le TVI, il existe un unique $a \in]0, +\infty[$ tel que $f(a) = 0$.
6. $f(a) = 0 \iff e^a - e^{-a} = 1 \iff e^{2a} - e^a - 1 = 0$.
 En posant $X = e^a > 0$, $X^2 - X - 1 = 0 \implies X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or ϕ).
 D'où $a = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
7. $f'(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} = \frac{X + 1/X}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$.
8. Équation de la tangente $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a) \iff y = \sqrt{5} \left(x - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right)$.
9. $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote verticale en $x = 0$, une asymptote oblique $y = x$ en $+\infty$, et coupe l'axe des abscisses en $a \approx 0,481$ avec une pente égal à $\sqrt{5} \approx 2,24$.

Exercice 6 — Étude d'une suite combinatoire (u_n)

1. Exprimer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} \frac{4^n}{\sqrt{n} \binom{2n}{n}} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

En élevant au carré :

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n(n+1)} = 1 + \frac{1}{4n(n+1)} \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{4n(n+1)}} \quad (c = 1)$$

2. $c = 1 > 0 \implies 1 + \frac{1}{4n(n+1)} > 1 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Comme $u_n > 0$, (u_n) est strictement croissante.
3. (a) $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est bien définie.
 (b) Par concavité de la fonction logarithme, la courbe est sous sa tangente en 0 : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.
 (c) Par somme télescopique : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.
 (d) $v_k = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{8k(k+1)}$.
 D'où $\sum_{k=1}^n v_k \leq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{8}$.
4. (a) La suite $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$ est strictement croissante (termes $v_k > 0$) et majorée par $1/8$. D'après le théorème de la limite monotone, $^{**}(S_n)$ converge vers une limite $L \leq 1/8^{**}$.
 (b) $S_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \ln(u_{n+1}) + \ln 2 \implies \ln(u_{n+1}) = S_n - \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L - \ln 2$.

Par continuité de la fonction exponentielle, $^{**}(u_n)$ converge vers $\ell = \frac{e^L}{2} > 0^{**}$.

Exercice 7 — Étude de suites implicites

1. $f'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$. f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
 $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(1) = 2 - n < 0$ (car $n \geq 3$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Par le TVI sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$, f_n s'annule en deux points uniques α_n et β_n vérifiant $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

2. Étude de (α_n) :

- (a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n - x = x^n(x - 1) - x \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.
(b) $f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_n(\alpha_n) = 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Puisque f_{n+1} est décroissante sur $[0, 1]$, (α_n) est décroissante**.
(c) (α_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers $\ell \in [0, 1]$.
 $\alpha_n^n - n\alpha_n + 1 = 0 \implies n\alpha_n = 1 + \alpha_n^n$. Comme $\alpha_n \leq \alpha_3 < 1$, $\alpha_n^n \rightarrow 0$.
D'où $n\alpha_n \rightarrow 1 \implies \alpha_n \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$. La limite est $\ell = 0$.
(d) $n\alpha_n = 1 + \alpha_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

3. Étude de (β_n) :

- (a) $f_n(2) = 2^n - 2n + 1 > 0$ pour tout $n \geq 3$.
Puisque f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $f_n(\beta_n) = 0 < f_n(2)$, on a finalement :
** $\forall n \geq 3$, $\beta_n < 2$ ** ($n_0 = 3$).
(b) $\beta_n^n = n\beta_n - 1 < 2n - 1 \implies n \ln(\beta_n) < \ln(2n - 1) \implies \ln(\beta_n) < \frac{\ln(2n-1)}{n}$.
(c) $0 < \ln(\beta_n) < \frac{\ln(2n-1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\beta_n) = 0$, donc ** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 1$ **.