

Série PCSI / PTSI - vrai DS n°0010

Mathématiques — Septembre 2026, Quelquepart.

Trigonométrie, Analyse, Étude de $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$ & Suites Implicites (3h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★

Abstraction & Raisonnement : ★★

Exercice 1 — Questions indépendantes

1. Donner (sans démonstration) :

- i) Le domaine de définition de la fonction $\tan$.
- ii) Sa parité et ses variations.
- iii) Les 2 expressions usuelles de sa dérivée.
- iv) 2 valeurs remarquables de $\tan$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- v) La limite de $\tan(x)$ en $\pi/2$ à gauche.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

- (a) La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.
- (b) La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- (c) La fonction f admet un maximum en a sur $\mathbb{R}$.
- (d) La fonction f est continue en a .

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$.

4. Déterminer la valeur de $\int_0^{\pi/3} \cos(t) \cos(2t) dt$.

Indication : On pourra écrire $2 \cos(t) \cos(2t)$ comme la somme de 2 cosinus bien choisis.

5. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta} = 1 + \cos^2 \theta$.

Déterminer les solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 - \sin^2(\theta)x - \cos^2(\theta) = 0$.

6. Déterminer la limite de $f(x) = x^{\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right)}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Pour $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, calculer en simplifiant le résultat les sommes :

$$(a) \sum_{k=1}^n (k^2 - k), \quad (b) \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{3^{3k+2n}}{2^{k-1}}, \quad (c) \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

Exercice 2 — Forme $r \cos(2x - \varphi)$

1. Trouver $r > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) - \sin(2x) = r \cos(2x - \varphi)$$

2. Résoudre l'équation : $\cos(2x) - \sin(2x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. Donner les solutions de cette équation dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exercice 3 — Vrai / Faux

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en le justifiant :

1. Toute suite croissante est majorée.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+ / y^2 = x$
3. $\exists y \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$
4. $\exists x, y \in \mathbb{R}_+^* / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$

Dans les propositions suivantes, a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$:

5. $ac < 0$ implique que le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes.
6. $b = 0$ implique que le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles opposées.
7. $(\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0) \implies$ le discriminant $\Delta > 0$.

Exercice 4 — Étude de fonction avec puissance rationnelle

On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^{1/4}}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Faire le tableau de variations de f .

Exercice 5 — Étude de la fonction $f(x) = \ln(\exp(x)-\exp(-x))$

On étudie la fonction f définie par : $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
4. Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$. Qu'est-ce que ce résultat implique sur le graphe de f ?
5. Dédurre des premières questions l'existence d'un unique réel a tel que $f(a) = 0$.
6. Déterminer la valeur de a .
7. En déduire que $f'(a) = \sqrt{5}$.
8. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a .
9. Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé.

Exercice 6 — Étude d'une suite combinatoire (u_n)

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ à déterminer telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \frac{c}{4n(n+1)}}$$

2. Montrer que (u_n) est monotone.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
 - (a) Justifier que la suite (v_n) est bien définie.
 - (b) Montrer que, pour $x \geq 0$, $\ln(x+1) \leq x$.
 - (c) Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et en déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq 1$.
 - (d) En déduire que $\sum_{k=1}^n v_k \leq \frac{1}{8}$.
4.
 - (a) Montrer que la suite (S_n) définie par : $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$, converge.
 - (b) En déduire que (u_n) converge.

Exercice 7 — Étude de suites implicites

Pour tout entier $n \geq 3$, on définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Soit un entier $n \geq 3$. Montrer que $f_n(x) = 0$ admet deux solutions x dans $\mathbb{R}_+$, notées α_n, β_n vérifiant :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

2. **Étude de (α_n) :**

- (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
- (b) En déduire la monotonie de la suite (α_n) .
- (c) Montrer que (α_n) converge et déterminer sa limite.
- (d) Montrer que $n\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

3. **Étude de (β_n) :**

- (a) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $\beta_n < 2$.
- (b) En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, $\ln(\beta_n) < \frac{\ln(2n-1)}{n}$.
- (c) En déduire la limite de β_n quand $n \rightarrow +\infty$.