

Série PCSI / PTSI — CORRIGÉ : vrai DS n°0011

Mathématiques — Septembre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

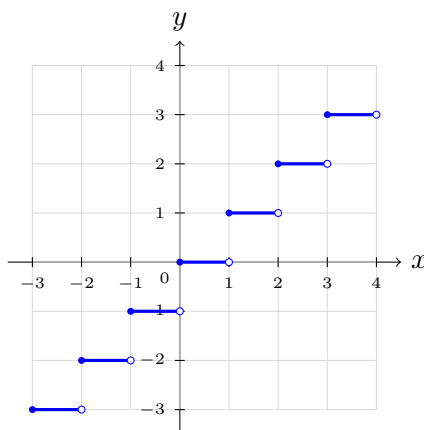
Questions diverses, Irrationalité, Zeckendorf & Méthode de Cardan (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

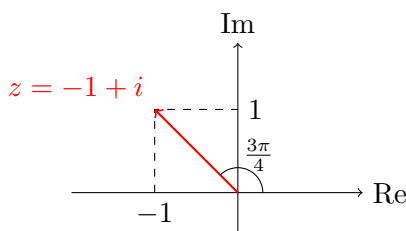
Questions diverses

- (Q1) La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ associe à tout réel x l'unique entier relatif k tel que $k \leq x < k+1$.
Son graphe forme un escalier :



- (Q2) Soit $z = -1 + i$.

- Module : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- Argument : $z = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, d'où $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.



- (Q3) En multipliant par le conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{3-2i}{1+3i} = \frac{(3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{3-9i-2i-6}{1+9} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$$

- (Q4) (i) **Algorithme d'Euclide :**

$$84 = 60 \times 1 + 24, \quad 60 = 24 \times 2 + 12, \quad 24 = 12 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 12, donc $\text{pgcd}(84, 60) = 12$.

On en déduit $\text{ppcm}(84, 60) = \frac{84 \times 60}{12} = 420$.

(ii) **Décomposition en facteurs premiers :**

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7 \quad \text{et} \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{pgcd}(84, 60) = 2^2 \times 3 = \mathbf{12} \text{ et } \text{ppcm}(84, 60) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = \mathbf{420}.$$

(Q5) (i) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(ii) **Démonstration par récurrence :** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \ll \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg.$

- *Initialisation :* Pour $n = 0$, $\sum_{k=1}^0 k^2 = 0$ et $\frac{0 \times 1 \times 1}{6} = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \end{aligned}$$

Or $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Q6) (i) $\sin(p) + \sin(q) = \mathbf{2} \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$

(ii) **Méthode trigonométrique :** Posons $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$, soit $p = x + y$ et $q = x - y$.

$$\begin{aligned} \sin(p) + \sin(q) &= \sin(x+y) + \sin(x-y) \\ &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) + (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = \mathbf{2 \sin x \cos y} \end{aligned}$$

(iii) **Méthode complexe :**

$$\begin{aligned} \sin(p) + \sin(q) &= \text{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \text{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right) \\ &= \text{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = \mathbf{2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \end{aligned}$$

(Q7) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k\right).$

Comme $e^{ix} \neq 1$, par somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En prenant la partie réelle : $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$

(Q8) Par linéarisation : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, d'où $\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x).$

$$\int_0^\pi \cos^4(x) dx = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) \right]_0^\pi = \frac{\mathbf{3\pi}}{8}$$

(Q9) • $(\mathcal{E}_1) : z^2 - z + 3 = 0. \Delta = 1 - 12 = -11 = (i\sqrt{11})^2.$

Solutions : $\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{1-i\sqrt{11}}{2}, \frac{1+i\sqrt{11}}{2} \right\}.$

• $(\mathcal{E}_2) : z^2 + (1+i)z + 2-i = 0. \Delta = (1+i)^2 - 4(2-i) = -8+6i.$

Posons $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -8+6i$. On a $x^2 - y^2 = -8$, $x^2 + y^2 = 10$ et $2xy = 6$.
D'où $\delta = \pm(1+3i)$. Solutions $z = \frac{-(1+i) \pm (1+3i)}{2}$, soit $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{i}, -\mathbf{1} - \mathbf{2i}\}.$

• $(\mathcal{E}_3) : z^3 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i2\pi/3}.$

Solutions : $\mathcal{S}_3 = \left\{ \sqrt[3]{2}e^{i2\pi/9}, \sqrt[3]{2}e^{i8\pi/9}, \sqrt[3]{2}e^{i14\pi/9} \right\}.$

• $(\mathcal{E}_4) : z^2 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i2\pi/3}.$

Solutions : $z = \pm\sqrt{2}e^{i\pi/3}$, d'où $\mathcal{S}_4 = \left\{ \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2} \right\}.$

Problème A — Irrationalité de $\sqrt{d}$

A.I — Première méthode

(A.I.1) Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- Si $a \mid b$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$. Donc $b^2 = k^2 a^2$, d'où $a^2 \mid b^2$.
- Réciproquement, si $a^2 \mid b^2$, considérons $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod p_i^{\beta_i}$.
La condition $a^2 \mid b^2 \iff \forall i, 2\alpha_i \leq 2\beta_i \iff \forall i, \alpha_i \leq \beta_i \iff a \mid b$.

On a donc bien l'équivalence : $a \mid b \iff a^2 \mid b^2$.

(A.I.2) Supposons par l'absurde que $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$. Il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{d} = \frac{a}{b}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$. D'où $a^2 = db^2$.

Dans la décomposition en facteurs premiers, l'exposant de tout nombre premier dans a^2 et b^2 est pair. Comme d n'est pas un carré parfait, au moins un facteur premier dans d a un exposant impair. L'exposant de ce premier dans db^2 est donc impair, ce qui contredit le fait qu'il soit pair dans a^2 . Par conséquent, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

A.II — Deuxième méthode

(A.II.1) Supposons $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$, soit $\sqrt{d} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Comme $q\sqrt{d} = p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{d} \in \mathbb{N}\}$ est non vide. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, donc A **admet un minimum**, noté $a = \min A$.

(A.II.2) Par définition, $b = a(\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor)$.

Comme d n'est pas un carré parfait, $\lfloor \sqrt{d} \rfloor < \sqrt{d} < \lfloor \sqrt{d} \rfloor + 1 \implies 0 < \sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor < 1$.

Puisque $a > 0$, il vient $0 < b < a$.

De plus, $a\sqrt{d} \in \mathbb{N}$ (car $a \in A$) et $a\lfloor \sqrt{d} \rfloor \in \mathbb{N}$, donc $b = a\sqrt{d} - a\lfloor \sqrt{d} \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Étant strictement positif, $b \in \mathbb{N}^*$.

(A.II.3) Calculons $b\sqrt{d}$:

$$b\sqrt{d} = (a\sqrt{d} - a\lfloor \sqrt{d} \rfloor)\sqrt{d} = ad - \lfloor \sqrt{d} \rfloor(a\sqrt{d})$$

Puisque $a, d, \lfloor \sqrt{d} \rfloor, a\sqrt{d} \in \mathbb{N}$, on a $b\sqrt{d} \in \mathbb{N}$. Comme $b > 0$, $b \in A$.

(A.II.4) Comme $0 < \sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor < 1$ et $a > 0$, on a immédiatement $b < a$.

(A.II.5) L'existence de $b \in A$ avec $b < a = \min A$ est une contradiction.

L'hypothèse initiale est donc fausse : $\sqrt{d}$ **est irrationnel**.

Problème B — Décomposition de Zeckendorf

B.I — Préliminaires

(B.I.1) $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13$.

(B.I.2) $F_6 = 8 \leq 12 < 13 = F_7$, d'où $\nu_{12} = 6$.

(B.I.3) $12 = 8 + 3 + 1 = \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_2$ (avec $6 \ll 4 \ll 2$).

(B.I.4) Par récurrence immédiate, $F_1 = 1 > 0$ et $F_2 = 1 > 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{F}_n \in \mathbb{N}^*$.

(B.I.5) Pour $n \geq 2, F_{n+1} - F_n = F_{n-1} > 0$. F **est strictement croissante pour $n \geq 2$** .

B.II — Unicité

(B.II.1) Récurrence sur $k \geq 1$:

- Pour $k = 1$: $F_{a_1} < F_{a_1+1}$ car $a_1 \geq 1$ et F croît strictement dès le rang 2.

- Supposons la propriété vraie au rang $k \geq 1$. Soient $0 < a_1 \ll \dots \ll a_{k+1}$.
Puisque $a_k \ll a_{k+1}$, $a_k + 2 \leq a_{k+1} \implies a_k + 1 \leq a_{k+1} - 1$.
Par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{a_i} = \left(\sum_{i=1}^k F_{a_i} \right) + F_{a_{k+1}} < F_{a_{k+1}} + F_{a_{k+1}} \leq F_{a_{k+1}-1} + F_{a_{k+1}} = F_{a_{k+1}+1}$$

La propriété est démontrée pour tout $k \geq 1$.

- (B.II.2) Soit $n = \sum_{i=1}^k F_{a_i}$ une décomposition de Zeckendorf avec a_k le plus grand indice.
On a $F_{a_k} \leq n < F_{a_{k+1}}$, ce qui signifie par définition de ν_n que $a_k = \nu_n$.
- (B.II.3) Récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$: pour $n = 0$, la somme vide est l'unique décomposition.
Soit $n \geq 1$. Supposons l'unicité vraie pour tout $m < n$.
Si n admet une décomposition de Zeckendorf, son terme maximal est nécessairement F_{ν_n} .
Alors $n - F_{\nu_n}$ admet une décomposition formée des termes restants. Par H.R. ($n - F_{\nu_n} < n$), cette décomposition est unique, donc celle de n l'est aussi.

B.III — Existence

- (B.III.1) Par définition de ν_n , $F_{\nu_n} \leq n < F_{\nu_n+1} = F_{\nu_n} + F_{\nu_n-1}$.
En retranchant F_{ν_n} , il vient : $0 \leq n - F_{\nu_n} < F_{\nu_n-1}$.
- (B.III.2) Démontrons l'existence par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$:
- Pour $n = 0$, la somme vide convient.
 - Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai pour tout $m < n$.
Posons $n' = n - F_{\nu_n}$. On a $0 \leq n' < F_{\nu_n-1} < n$.
Par H.R., n' admet une décomposition $n' = \sum_{i=1}^k F_{a_i}$.
Si $n' = 0$, $n = F_{\nu_n}$ convient. Si $n' > 0$, l'indice maximal de n' vérifie $\nu_{n'} \leq \nu_n - 2$, ce qui assure la condition de non-consécutivité $a_k \ll \nu_n$.
En ajoutant F_{ν_n} , on obtient une décomposition de Zeckendorf valide pour n .
- Tout entier naturel admet donc au moins une décomposition de Zeckendorf.

Problème C — Méthode de Cardan

C.I — Premières résolutions

- (C.I.1) $(\mathcal{E}_{1,0}) : x^3 - x = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0 \implies \mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.
- (C.I.2) $(\mathcal{E}_{7,-6}) : x^3 - 7x + 6 = 0$. $x = 1$ est racine évidente.
Factorisons : $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3) \implies \mathcal{S} = \{-3, 1, 2\}$.

C.II — Nombre de solutions

- (C.II.1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{p,q}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{p,q}(x) = +\infty$.
- (C.II.2) $f_{p,q}$ est continue et change de signe sur $\mathbb{R}$. Par le TVI, $n_{p,q} \geq 1$.
- (C.II.3) Si $p = 0$, $f'_{0,q}(x) = 3x^2 \geq 0$. $f_{0,q}$ est strictement croissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'où $n_{0,q} = 1$.
- (C.II.4) Si $p < 0$, $f'_{p,q}(x) = 3x^2 - p > 0$. $f_{p,q}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où $n_{p,q} = 1$.
- (C.II.5) Si $p > 0$, $f'_{p,q}(x) = 3x^2 - p$ s'annule en $x_1 = -\sqrt{p/3}$ et $x_2 = \sqrt{p/3}$.
- (a) $n_{p,q} = 3 \iff f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0 \iff f(x_1)f(x_2) < 0$.
Or $f(x_1)f(x_2) = q^2 - \frac{4p^3}{27} = \Delta_{p,q}$. Ainsi, $n_{p,q} = 3 \iff \Delta_{p,q} < 0$.
- (b) $n_{p,q} = 2 \iff$ l'un des extrema est nul $\iff \Delta_{p,q} = 0$.

C.III — Méthode de Cardan

(C.III.1) Par les relations entre coefficients et racines de $z^2 - xz + \frac{p}{3} = 0$: $u + v = x$ et $uv = \frac{p}{3}$.

(C.III.2) $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$.

(C.III.3) Comme $x^3 - px - q = 0$, en remplaçant x par $u + v$ et p par $3uv$:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - q = 0 \implies u^3 + v^3 - q = 0 \implies \mathbf{u^3 + v^3 = q}$$

(C.III.4) $(z - u^3)(z - v^3) = z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 = \mathbf{z^2 - qz + \frac{p^3}{27}}$.

(C.III.5) u^3 et v^3 sont les solutions de $z^2 - qz + \frac{p^3}{27} = 0$, dont le discriminant réduit vaut $\Delta_{p,q}$.

Les solutions valent donc bien $\frac{q \pm \lambda_{p,q}}{2}$.

C.IV — Application

(C.IV.1) Pour $(\mathcal{E}_{3,1})$, $p = 3$ et $q = 1$. $\Delta_{3,1} = 1 - 4 = -3 < 0 \implies \mathbf{n_{3,1} = 3}$.

(C.IV.2) $\lambda_{3,1} = i\sqrt{3}$, donc $\frac{1 \pm \lambda_{3,1}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e^{\pm i\pi/3}}$.

(C.IV.3) Les racines cubiques de $e^{i\pi/3}$ sont $e^{i\pi/9}$, $e^{i7\pi/9}$ et $e^{i13\pi/9}$.

(C.IV.4) En formant $x = u + v = 2 \operatorname{Re}(u)$:

$$\mathcal{S} = \left\{ 2 \cos \left(\frac{\pi}{9} \right), 2 \cos \left(\frac{7\pi}{9} \right), 2 \cos \left(\frac{13\pi}{9} \right) \right\}$$