

Série PCSI/PTSI — vrai DS n°0011

Mathématiques — Octobre 2025, Quelquepart.

Questions diverses, Irrationalité, Zeckendorf & Méthode de Cardan (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ★★○

Abstraction & Raisonnement : ★★○

Questions diverses

(Q1) Représenter soigneusement le graphe de la fonction partie entière.

(Q2) Calculer le module et l'argument de $-1 + i$.

Représenter graphiquement ce nombre complexe, en faisant apparaître le module et l'argument.

(Q3) Mettre le nombre complexe $z = \frac{3 - 2i}{1 + 3i}$ sous forme algébrique.

(Q4) Calculer de deux manières différentes le pgcd et le ppcm de 84 et 60 :

(i) En utilisant l'algorithme d'Euclide.

(ii) En les décomposant en facteurs premiers.

(Q5) (i) Compléter la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \dots$$

(ii) La démontrer.

(Q6) (i) Compléter la formule de factorisation suivante :

$$\forall p, q \in \mathbb{R}, \quad \sin(p) + \sin(q) = \dots$$

(ii) La démontrer avec de la trigonométrie.

(iii) La démontrer avec des nombres complexes.

(Q7) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

(Q8) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^\pi \cos^4(x) dx$$

(Q9) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(\mathcal{E}_1) : z^2 - z + 3 = 0$$

$$(\mathcal{E}_2) : z^2 + (1 + i)z + 2 - i = 0$$

$$(\mathcal{E}_3) : z^3 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$(\mathcal{E}_4) : z^2 = -1 + i\sqrt{3}$$

Problème A — Irrationalité de $\sqrt{d}$

Dans tout ce problème, on fixe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ qui n'est pas un carré parfait :

$$\nexists k \in \mathbb{N}, \quad d = k^2$$

On souhaite montrer de deux manières différentes que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

A.I — Première méthode

(A.I.1) Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad a \mid b \iff a^2 \mid b^2$$

On pourra s'intéresser à la décomposition en facteurs premiers de a et b .

(A.I.2) Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

A.II — Deuxième méthode

Dans cette méthode, on suppose par l'absurde que $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$. On note $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{d} \in \mathbb{N}\}$.

(A.II.1) Montrer que A admet un minimum.

On notera désormais $a = \min A$ et $b = a\sqrt{d} - a\lfloor\sqrt{d}\rfloor$.

(A.II.2) Montrer que $b \in \mathbb{N}^*$.

(A.II.3) Montrer que $b \in A$.

(A.II.4) Montrer que $b < a$.

(A.II.5) Conclure.

Problème B — Décomposition de Zeckendorf

Définition.

▷ On définit la suite de Fibonacci de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\nu_n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid F_k \leq n\}$$

▷ Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on note $a \ll b$ quand $a + 2 \leq b$.

Autrement dit, $a \ll b$ signifie que $a < b$ avec a et b non consécutifs.

▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, une *décomposition de Zeckendorf* de n est une écriture de la forme suivante :

$$n = F_{a_1} + \cdots + F_{a_k}$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_k$ des entiers tels que $0 < a_1 \ll \cdots \ll a_k$.

On souhaite montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ admet une unique décomposition de Zeckendorf.

B.I — Préliminaires

(B.I.1) Sans justification, donner les premiers termes de la suite de Fibonacci, de F_0 à F_7 .

(B.I.2) Sans justification, donner la valeur de ν_{12} .

(B.I.3) Sans justification, donner une décomposition de Zeckendorf de 12.

(B.I.4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n \in \mathbb{N}^*$$

(B.I.5) Montrer que F est strictement croissante à partir du rang 2.

Remarque : cela permet notamment de justifier que ν_n est bien défini.

B.II — Unicité

(B.II.1) Montrer par récurrence simple sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $a_1, \dots, a_k$ sont des entiers tels que $0 < a_1 \ll \dots \ll a_k$, alors :

$$F_{a_1} + \dots + F_{a_k} < F_{a_k+1}$$

(B.II.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'une décomposition de Zeckendorf de n se termine forcément par F_{ν_n} .

(B.II.3) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ admet au plus une décomposition de Zeckendorf.

B.III — Existence

(B.III.1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq n - F_{\nu_n} < F_{\nu_n-1}$$

(B.III.2) Montrer par récurrence forte sur n que tout entier $n \in \mathbb{N}$ admet une décomposition de Zeckendorf.

Problème C — Méthode de Cardan

Définition. Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on considère :

★ l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : x^3 - px - q = 0$$

★ $n_{p,q}$ le nombre de solutions de $(\mathcal{E}_{p,q})$

★ la fonction $f_{p,q}$ suivante :

$$f_{p,q} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3 - px - q \end{cases}$$

★ le nombre $\Delta_{p,q}$ suivant :

$$\Delta_{p,q} := q^2 - \frac{4p^3}{27}$$

★ les deux racines carrées complexes $\pm \lambda_{p,q}$ de $\Delta_{p,q}$.

C.I — Premières résolutions

(C.I.1) Résoudre l'équation $(\mathcal{E}_{1,0})$.

(C.I.2) Résoudre l'équation $(\mathcal{E}_{7,-6})$.

C.II — Nombre de solutions

Dans cette partie, on fixe $p, q \in \mathbb{R}$ et on cherche à déterminer $n_{p,q}$.

(C.II.1) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de $f_{p,q}$.

(C.II.2) En déduire que $n_{p,q} \geq 1$.

(C.II.3) Dans cette question, on suppose que $p = 0$. Montrer que $n_{p,q} = 1$.

(C.II.4) Dans cette question, on suppose que $p < 0$. Montrer que $n_{p,q} = 1$.

(C.II.5) Dans cette question, on suppose que $p > 0$.

(a) En étudiant la fonction $f_{p,q}$, montrer que :

$$n_{p,q} = 3 \iff |q| < \frac{2p^{3/2}}{3\sqrt{3}} \iff \Delta_{p,q} < 0$$

(b) Montrer que :

$$n_{p,q} = 2 \iff \dots \iff \Delta_{p,q} = 0$$

(C.II.6) Montrer que :

$$n_{p,q} = 1 \iff \dots \iff \Delta_{p,q} > 0$$

C.III — Méthode de Cardan

Dans cette partie, on fixe $p, q \in \mathbb{R}$ et on considère $x \in \mathbb{R}$ une solution de $(\mathcal{E}_{p,q})$. On note u et v les deux solutions complexes de l'équation $z^2 - xz + \frac{p}{3} = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(C.III.1) Exprimer $u + v$ et uv .

(C.III.2) Compléter la formule du binôme suivante :

$$(u + v)^3 = \dots$$

(C.III.3) Montrer que $u^3 + v^3 = q$.

(C.III.4) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z - u^3)(z - v^3) = z^2 - qz + \frac{p^3}{27}$$

(C.III.5) Montrer que u^3 et v^3 valent $\frac{q \pm \lambda_{p,q}}{2}$.

C.IV — Application

Dans cette partie, on résout l'équation $(\mathcal{E}_{3,1})$.

(C.IV.1) Montrer que $n_{3,1} = 3$.

(C.IV.2) Exprimer sous forme trigonométrique $\frac{1 \pm \lambda_{3,1}}{2}$.

(C.IV.3) Déterminer les racines cubiques de $\frac{1 \pm \lambda_{3,1}}{2}$.

(C.IV.4) Résoudre $(\mathcal{E}_{3,1})$.