

Série PCSI / PTSI — CORRIGÉ : vrai DS n°0012

Mathématiques — Octobre 2026. Corrigé par Maths-Ingé

Série Harmonique, Non-Intégrité de H_n & Formule de Legendre (4h)

Si vous remarquez une erreur ou une coquille dans ce corrigé, merci de la signaler à :

maths.inge.contact@gmail.com

Questions diverses

(Q1) (a) Algorithme d'Euclide :

$$1200 = 324 \times 3 + 228$$

$$324 = 228 \times 1 + 96$$

$$228 = 96 \times 2 + 36$$

$$96 = 36 \times 2 + 24$$

$$36 = 24 \times 1 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 12, donc $\text{pgcd}(1200, 324) = 12$.

On en déduit $\text{ppcm}(1200, 324) = \frac{1200 \times 324}{12} = 100 \times 324 = 32\,400$.

(b) Décomposition en facteurs premiers :

$$1200 = 12 \times 100 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \quad \text{et} \quad 324 = 4 \times 81 = 2^2 \times 3^4$$

$$\text{pgcd}(1200, 324) = 2^{\min(4,2)} \times 3^{\min(1,4)} \times 5^{\min(2,0)} = 2^2 \times 3 = 12.$$

$$\text{ppcm}(1200, 324) = 2^{\max(4,2)} \times 3^{\max(1,4)} \times 5^{\max(2,0)} = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 = 32\,400.$$

$$(Q2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration par récurrence : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- *Initialisation* : Pour $n = 0$, $\sum_{k=1}^0 k^2 = 0$ et $\frac{0 \times 1 \times 1}{6} = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Q3) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 5r + 6 = 0 \iff (r-2)(r-3) = 0$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.

Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$.

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta = 2 \\ u_1 = 2\alpha + 3\beta = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

(Q4) $(1-i)x^2 - (3+3i)x - 4 + 2i = 0.$

$$\Delta = (3+3i)^2 - 4(1-i)(-4+2i) = 18i - 4(-2+6i) = 8 - 6i$$

Cherchons $\delta = u + iv$ tel que $\delta^2 = 8 - 6i$. On obtient $u^2 - v^2 = 8$, $u^2 + v^2 = 10$ et $2uv = -6$.
D'où $u^2 = 9 \implies u = \pm 3$ et $v^2 = 1 \implies v = \mp 1$ (car $uv < 0$). On choisit $\delta = 3 - i$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(3+3i) + (3-i)}{2(1-i)} = \frac{6+2i}{2(1-i)} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \mathbf{1 + 2i} \\ x_2 &= \frac{(3+3i) - (3-i)}{2(1-i)} = \frac{4i}{2(1-i)} = \frac{2i(1+i)}{2} = \mathbf{-1 + i} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\mathbf{1 + 2i}, \mathbf{-1 + i}\}$.

(Q5) (i) $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(\mathbf{a - b}) - \cos(\mathbf{a + b}))$.

(ii) **Par la trigonométrie :**

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = (\cos a \cos b + \sin a \sin b) - (\cos a \cos b - \sin a \sin b) = 2 \sin a \sin b$$

(iii) **Par les nombres complexes :**

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \right) = -\frac{1}{4} (e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2} - \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{aligned}$$

(Q6) (a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

(b) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \implies \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$

Comme $\cos(\pi/12) > 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (car $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$).

(c) (i) $\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \omega$, donc $e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine carrée complexe de ω .

(ii) $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}.$

(iii) Cherchons $Z = x + iy$ tel que $Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}.$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy > 0 \end{cases} \implies x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \implies x = \pm \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Les racines carrées complexes sont $\pm \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right).$

(iv) Comme $\text{Re}(e^{i\frac{\pi}{12}}) > 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

(Q7) Par définition de la partie entière, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$kx - 1 < [kx] \leq kx$$

En sommant de $k = 1$ à n :

$$x \sum_{k=1}^n k - n < \sum_{k=1}^n [kx] \leq x \sum_{k=1}^n k$$

Comme $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, en divisant par n^2 :

$$x \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \leq x \frac{n+1}{2n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x \frac{n+1}{2n} = \frac{x}{2}$. D'après le théorème d'encadrement : $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{kx}] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{x}{2}.$

- (Q8) (a) Pour $n = 1$, $1 - \frac{1}{1} = 0 \in E$. De plus, $\forall n \geq 1, \frac{1}{n} \leq 1 \implies 1 - \frac{1}{n} \geq 0$.
 0 est un minorant de E et appartient à E , donc $\mathbf{0} = \min \mathbf{E}$.
- (b) Pour tout $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{n} < 1$, donc 1 est un majorant de E .
 Soit $\varepsilon > 0$. Par propriété archimédienne, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon \implies 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$.
 On en déduit que $\mathbf{1} = \sup \mathbf{E}$.
- (Q9) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Résolvons l'équation d'inconnue $x \neq 1$:

$$\frac{2x+3}{x-1} = y \iff 2x+3 = y(x-1) \iff x(2-y) = -y-3 \iff x = \frac{y+3}{y-2}$$

Vérifions si x peut valoir 1 : $\frac{y+3}{y-2} = 1 \iff y+3 = y-2 \iff 3 = -2$ (impossible).
 Ainsi, l'unique solution est $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}+\mathbf{3}}{\mathbf{y}-\mathbf{2}} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}\}$.

Exercice — Série harmonique

I — Divergence de la série harmonique

- (I.1) Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie sur $] -1; +\infty[$.
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. f' est négative sur $] -1; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$.
 f admet un minimum global en 0 valant $f(0) = 0$. Donc $\forall \mathbf{x} \in] -\mathbf{1}; +\infty[, \mathbf{x} \geq \ln(\mathbf{1} + \mathbf{x})$.
- (I.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le résultat précédent avec $x = \frac{1}{n} > 0$:

$$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \implies \frac{1}{\mathbf{n}} \geq \ln(\mathbf{n} + \mathbf{1}) - \ln(\mathbf{n})$$

- (I.3) En sommant la relation précédente pour k allant de 1 à n (somme télescopique) :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) \implies \mathbf{H}_{\mathbf{n}} \geq \ln(\mathbf{n} + \mathbf{1})$$

- (I.4) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par théorème de comparaison, $\mathbf{H}_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathbf{n} \rightarrow +\infty} +\infty$.

II — Nombre harmonique entier

- (II.1) Soit $x = \frac{2a+1}{2b} \in S$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
 $\frac{x}{2} = \frac{2a+1}{4b} = \frac{2a+1}{2(2b)}$. Comme $2b \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} \in S$.
- (II.2) Soient $x = \frac{a_1}{2b_1+1}$ et $y = \frac{a_2}{2b_2+1}$ deux éléments de R .

$$x + y = \frac{a_1(2b_2+1) + a_2(2b_1+1)}{(2b_1+1)(2b_2+1)} = \frac{2(a_1b_2 + a_2b_1) + a_1 + a_2}{2(2b_1b_2 + b_1 + b_2) + 1}$$

Le dénominateur est de la forme $2B + 1$ avec $B \in \mathbb{N}$, donc $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{R}$.

- (II.3) Par récurrence immédiate à partir de la question précédente, toute somme finie d'éléments de R appartient à R : $\sum_{k=1}^n \mathbf{x}_{\mathbf{k}} \in \mathbf{R}$.
- (II.4) Soient $x = \frac{a}{2b+1} \in R$ et $y = \frac{2c+1}{2d} \in S$.

$$x + y = \frac{a(2d) + (2c+1)(2b+1)}{2d(2b+1)} = \frac{2(ad + 2bc + b + c) + 1}{2(2bd + d)}$$

Le numérateur est impair et le dénominateur est le double d'un entier strictement positif, donc $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{S}$.

- (II.5) Démontrons par récurrence forte que $\forall n \geq 2, H_n \in S$:

- *Base* : $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2(1)+1}{2(1)} \in S$ et $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = \frac{2(5)+1}{2(3)} \in S$.
- *Hérédité* : Soit $n \geq 2$. Supposons $H_k \in S$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
 - **Cas** $n+1 = 2m$ (**pair**, $m \geq 2$) :

$$H_{2m} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}H_m + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1}$$

Par H.R., $H_m \in S \implies \frac{1}{2}H_m \in S$ (d'après II.1). De plus, chaque $\frac{1}{2k-1} \in R$, donc leur somme appartient à R (d'après II.3). D'après II.4, $H_{2m} \in S$.

- **Cas** $n+1 = 2m+1$ (**impair**) : $H_{2m+1} = H_{2m} + \frac{1}{2m+1}$. Par le cas précédent, $H_{2m} \in S$, et $\frac{1}{2m+1} \in R$. D'après II.4, $H_{2m+1} \in S$.

Ainsi, $\forall n \geq 2, \mathbf{H}_n \in \mathbf{S}$.

(II.6) Supposons par l'absurde qu'il existe $n \geq 2$ tel que $H_n \in \mathbb{Z}$.

Alors $H_n = \frac{k}{1} = \frac{2k}{2}$. Mais comme $H_n \in S$, $H_n = \frac{2a+1}{2b}$.

D'où $\frac{2a+1}{2b} = k \implies 2a+1 = 2bk$.

Un nombre impair $(2a+1)$ serait égal à un nombre pair $(2bk)$, ce qui est impossible.

Donc $\forall n \geq 2, \mathbf{H}_n \notin \mathbb{Z}$.

Problème — Formule de Legendre

I — Exemples

(I.1) $45 = 3^2 \times 5$. Comme $3^2 \mid 45$, on a bien $\mathbf{2} \in \mathbf{A}_3(45)$.

(I.2) $72 = 2^3 \times 3^2$.

$$\mathbf{A}_2(72) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \mathbf{A}_2^*(72) = \{1, 2, 3\}$$

(I.3) $\mathbf{v}_2(72) = 3, \quad \mathbf{v}_3(72) = 2, \quad \mathbf{v}_5(72) = 0$.

(I.4) $\mathcal{M}_5(23) = \{5, 10, 15, 20\}$.

II — Valuation p -adique

(II.1) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Posons $a = p^{v_p(a)}a'$ et $b = p^{v_p(b)}b'$ avec $p \nmid a'$ et $p \nmid b'$.

Alors $ab = p^{v_p(a)+v_p(b)}a'b'$. Comme $p \nmid a'b'$, on en déduit que $\mathbf{v}_p(\mathbf{ab}) = \mathbf{v}_p(\mathbf{a}) + \mathbf{v}_p(\mathbf{b})$.

(II.2) Par récurrence immédiate à partir du résultat précédent : $\mathbf{v}_p(\prod_{i=1}^n \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_p(\mathbf{a}_i)$.

(II.3) Par définition de la valuation p -adique, $p^k \mid a \iff k \leq v_p(a)$.

Donc $A_p(a) = \{0, 1, \dots, v_p(a)\}$. Il s'agit d'une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ dont le maximum est $\mathbf{v}_p(\mathbf{a})$.

(II.4) D'après la question précédente, $\mathbf{A}_p(\mathbf{a}) = \llbracket 0, \mathbf{v}_p(\mathbf{a}) \rrbracket$.

En retirant 0, $A_p^*(a) = \llbracket 1, v_p(a) \rrbracket$, d'où $\text{Card } \mathbf{A}_p^*(\mathbf{a}) = \mathbf{v}_p(\mathbf{a})$.

III — Multiples

(II.5) Les éléments de $\mathcal{M}_b(a)$ sont inférieurs ou égaux à a , donc $^{**}a$ est un majorant simple ** de $\mathcal{M}_b(a)$.

Ce majorant appartient à $\mathcal{M}_b(a)$ (et est donc son maximum) si et seulement si $^{**}b \mid a^{**}$.

(II.6) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

(II.7) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $b > 0$, $kb \leq a \iff k \leq \frac{a}{b}$.

Puisque k est un entier, $k \leq \frac{a}{b} \iff \mathbf{k} \leq \lfloor \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \rfloor$.

(II.8) $\mathcal{M}_b(a) = \{kb \mid k \in \mathbb{N}^*, kb \leq a\} = \{kb \mid 1 \leq k \leq \lfloor a/b \rfloor\}$.

L'application $k \mapsto kb$ est une bijection de $\llbracket 1, \lfloor a/b \rfloor \rrbracket$ sur $\mathcal{M}_b(a)$.

D'où $\text{Card } \mathcal{M}_b(a) = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

(II.9) On a $\mathcal{M}_b(a+1) = \{n \in \llbracket 1; a+1 \rrbracket \mid b \mid n\}$.

• Si $b \mid a+1$, alors $a+1 \in \mathcal{M}_b(a+1)$, donc $\mathcal{M}_b(a+1) = \mathcal{M}_b(a) \cup \{a+1\}$.

On a $\text{Card } \mathcal{M}_b(a+1) = \text{Card } \mathcal{M}_b(a) + 1 = \lfloor a/b \rfloor + 1$.

• Si $b \nmid a+1$, alors $a+1 \notin \mathcal{M}_b(a+1)$, donc $\mathcal{M}_b(a+1) = \mathcal{M}_b(a)$.

On a $\text{Card } \mathcal{M}_b(a+1) = \text{Card } \mathcal{M}_b(a) = \lfloor a/b \rfloor$.

D'où la propriété 3.

IV — Somme de Legendre

(II.10) Si $k > \frac{\ln(a)}{\ln(p)}$, alors $k \ln(p) > \ln(a) \implies \ln(p^k) > \ln(a) \implies p^k > a$.

On a donc $0 \leq \frac{a}{p^k} < 1$, d'où $\left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor = 0$.

V — Formule de Legendre

(II.11)

(II.12) $L_p(a+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{a+1}{p^k} \right\rfloor$. En utilisant la propriété 3 :

$$L_p(a+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor + \sum_{k \in A_p^*(a+1)} 1 = L_p(a) + \text{Card } A_p^*(a+1) = \mathbf{L}_p(\mathbf{a}) + \mathbf{v}_p(\mathbf{a} + \mathbf{1})$$

(II.13) Par récurrence sur $a \geq 1$:

• *Initialisation* : Pour $a = 1$, $v_p(1!) = v_p(1) = 0$ et $L_p(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lfloor 1/p^k \rfloor = 0$ (car $p^k \geq 2$).

• *Hérédité* : Supposons $v_p(a!) = L_p(a)$.

$$v_p((a+1)!) = v_p(a!) + v_p(a+1) = L_p(a) + v_p(a+1) = L_p(a+1).$$

Ainsi, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{v}_p(\mathbf{a}!) = \mathbf{L}_p(\mathbf{a})$.

(II.14)

(II.15) D'après la propriété 2, $L_p(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Card } \mathcal{M}_{p^k}(a)$.

Considérons la somme double en permutant les sommations sur les couples (k, m) tels que $m \in \llbracket 1; a \rrbracket$ et $p^k \mid m$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \text{Card}\{m \in \llbracket 1; a \rrbracket \mid p^k \mid m\} = \sum_{m=1}^a \text{Card}\{k \in \mathbb{N}^* \mid p^k \mid m\} = \sum_{\mathbf{m}=\mathbf{1}}^{\mathbf{a}} \text{Card } \mathbf{A}_p^*(\mathbf{m})$$

(II.16) D'après la propriété 1 ($\text{Card } A_p^*(m) = v_p(m)$) et la question II.2 :

$$L_p(a) = \sum_{m=1}^a v_p(m) = v_p\left(\prod_{m=1}^a m\right) = \mathbf{v}_p(\mathbf{a}!)$$

VI — Nombre de zéros d'une factorielle

(II.17) La lettre Ξ s'appelle ****Xi**** (ou Ksi). Sa minuscule est ****xi****.

(II.18) Si $p \leq q$, alors pour tout $k \geq 1$, $p^k \leq q^k \implies \frac{a}{p^k} \geq \frac{a}{q^k} \implies \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a}{q^k} \right\rfloor$.

En sommant sur $k \geq 1$, on obtient $\mathbf{L}_p(\mathbf{a}) \geq \mathbf{L}_q(\mathbf{a})$ (donc $L_p(a!) \geq L_q(a!)$).

(II.19) $10^k = 2^k \cdot 5^k$. $10^k \mid n \iff (2^k \mid n \text{ et } 5^k \mid n) \iff (v_2(n) \geq k \text{ et } v_5(n) \geq k) \iff \mathbf{k} \leq \min\{\mathbf{v}_2(\mathbf{n}), \mathbf{v}_5(\mathbf{n})\}$.

(II.20) $\Xi(n)$ est le plus grand entier k tel que $10^k \mid n$. D'après la question précédente, $\Xi(\mathbf{n}) = \min\{\mathbf{v}_2(\mathbf{n}), \mathbf{v}_5(\mathbf{n})\}$.

(II.21) Pour $n = 2025!$, $\Xi(2025!) = \min\{v_2(2025!), v_5(2025!)\}$.

Comme $2 \leq 5$, d'après VI.2, $v_2(2025!) = L_2(2025) \geq L_5(2025) = v_5(2025!)$.

Donc $\Xi(2025!) = v_5(2025!) = L_5(2025) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{2025}{5^k} \right\rfloor$.

$$\left\lfloor \frac{2025}{5} \right\rfloor = 405, \quad \left\lfloor \frac{2025}{25} \right\rfloor = 81, \quad \left\lfloor \frac{2025}{125} \right\rfloor = 16, \quad \left\lfloor \frac{2025}{625} \right\rfloor = 3, \quad \left\lfloor \frac{2025}{3125} \right\rfloor = 0$$

$$\Xi(2025!) = 405 + 81 + 16 + 3 = \mathbf{505}$$

La factorielle de 2025 se termine par ****505 zéros****.