

Série PCSI / PTSI — vrai DS n°0012

Mathématiques — Octobre 2026, Quelquepart.

Série Harmonique, Non-Intégrité de H_n & Formule de Legendre (4h)

Profil : [Classique CPGE]

Technicité calculatoire : ***

Abstraction & Raisonnement : ***

Questions diverses

(Q1) Déterminer $\text{pgcd}(1200, 324)$ et $\text{ppcm}(1200, 324)$ de deux manières :

- (a) En utilisant l'algorithme d'Euclide.
- (b) En utilisant la décomposition en facteurs premiers.

(Q2) Compléter la formule suivante, puis la démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \dots$$

(Q3) On considère la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n$$

(Q4) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$:

$$(1 - i)x^2 - (3 + 3i)x - 4 + 2i = 0$$

(Q5) (i) Compléter la formule suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sin(a) \sin(b) = \dots$$

(ii) La démontrer en utilisant la trigonométrie.

(iii) La démontrer en utilisant les nombres complexes.

(Q6) Dans cette question, on cherche à calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de trois manières différentes.

(a) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

(b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant une formule de duplication.

(c) On note $\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(i) Montrer que $e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine carrée complexe de ω .

(ii) Écrire ω sous forme algébrique.

(iii) En déduire la forme algébrique des deux racines carrées complexes de ω .

(iv) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(Q7) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$$

(Q8) On considère $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

(a) Montrer que $0 = \min E$.

(b) Montrer que $1 = \sup E$.

(Q9) Montrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists ! x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \frac{2x+3}{x-1} = y$$

Exercice — Série harmonique

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique :

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est appelée série harmonique.

▷ Dans la première partie, on montrera que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

▷ Dans la deuxième partie, on démontrera que 1 est le seul nombre harmonique entier.

Les deux parties sont indépendantes.

I — Divergence de la série harmonique

(I.1) Montrer que :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad x \geq \ln(1+x)$$

(I.2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln(n)$$

(I.3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n \geq \ln(n+1)$$

(I.4) Montrer que :

$$H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

II — Nombre harmonique entier

On considère les ensembles suivants :

$$R = \left\{ \frac{a}{2b+1} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\} \quad S = \left\{ \frac{2a+1}{2b} \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(II.1) Montrer que :

$$\forall x \in S, \quad \frac{x}{2} \in S$$

(II.2) Montrer que :

$$\forall x, y \in R, \quad x + y \in R$$

(II.3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in R, \quad \sum_{k=1}^n x_k \in R$$

(II.4) Montrer que :

$$\forall x \in R, \forall y \in S, \quad x + y \in S$$

(II.5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad H_n \in S$$

On pourra raisonner par récurrence forte, en distinguant les cas n pair et n impair dans l'hérédité.

(II.6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad H_n \notin \mathbb{Z}$$

Problème — Formule de Legendre

Définitions. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$.

▷ On note $A_p(a)$ et $A_p^*(a)$ les ensembles suivants :

$$A_p(a) := \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid a\} \quad A_p^*(a) := \{k \in \mathbb{N}^* \mid p^k \mid a\}$$

▷ On note $v_p(a)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de a .

▷ On note $\mathcal{M}_b(a)$ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M}_b(a) := \{n \in \llbracket 1; a \rrbracket \mid b \mid n\}$$

I — Exemples

(I.1) Montrer que $2 \in A_3(45)$.

(I.2) Sans justification, expliciter les deux ensembles suivants :

$$A_2(72) \quad A_2^*(72)$$

(I.3) Calculer les trois valeurs suivantes :

$$v_2(72) \quad v_3(72) \quad v_5(72)$$

(I.4) Sans justification, expliciter l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M}_5(23)$$

II — Valuation p -adique

(II.1) Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{P}, \quad v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$$

(II.2) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*, \quad v_p\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n v_p(a_i)$$

(II.3) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{P}, \quad v_p(a) = \max A_p(a)$$

(II.4) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{P}, \quad A_p(a) = \llbracket 0, v_p(a) \rrbracket$$

Une fois le 0 retiré, on en déduit en particulier la propriété suivante :

Propriété 1

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{P}, \quad \text{Card } A_p^*(a) = v_p(a)$$

III — Multiples

Dans cette partie, on démontre les deux propriétés suivantes :

Propriété 2

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Card } \mathcal{M}_b(a) = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

Propriété 3

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + 1 & \text{si } b \mid a+1 \\ \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor & \text{si } b \nmid a+1 \end{cases}$$

On fixe $a, b \in \mathbb{N}^*$.

(III.1) Donner un majorant simple de $\mathcal{M}_b(a)$.

À quelle condition ce majorant est-il un maximum de $\mathcal{M}_b(a)$?

(III.2) Pour $x \in \mathbb{R}$, rappeler la définition formelle de $\lfloor x \rfloor$.

(III.3) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad kb \leq a \iff k \leq \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

(III.4) Démontrer la propriété 2.

(III.5) Démontrer la propriété 3.

IV — Somme de Legendre

(IV.1) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k > \frac{\ln(a)}{\ln(p)} \implies \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor = 0$$

Définition. Soient $p \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question (IV.1), les termes de la somme suivante sont nuls à partir d'un certain rang :

$$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{p^4} \right\rfloor + \dots$$

On notera $L_p(a)$ cette somme, qui est en fait donc une somme finie :

$$L_p(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor$$

V — Formule de Legendre

Dans toute cette partie, on fixe $p \in \mathbb{P}$.

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{N}^*$, la factorielle de a est définie comme :

$$a! := 1 \times 2 \times \dots \times a = \prod_{i=1}^a i$$

Dans cette partie, on se propose de démontrer de deux manières différentes la formule de Legendre :

Formule de Legendre

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad v_p(a!) = L_p(a)$$

Les deux questions sont indépendantes.

(V.1) (i) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad L_p(a+1) = L_p(a) + v_p(a+1)$$

(ii) Montrer la formule de Legendre par récurrence.

(V.2) (i) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad L_p(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Card } \mathcal{M}_{p^k}(a) = \sum_{m=1}^a \text{Card } A_p^*(m)$$

(ii) Montrer la formule de Legendre (sans récurrence).

VI — Nombre de zéros d'une factorielle

Définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Xi(n)$ le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de n .
Par exemple : $\Xi(6314000) = 3$

(VI.1) Quel est le nom de la lettre grecque Ξ ? Quelle est sa minuscule?

(VI.2) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall p, q \in \mathbb{P}, \quad p \leq q \implies L_p(a!) \geq L_q(a!)$$

(VI.3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \quad 10^k \mid n \iff k \leq \min\{v_2(n), v_5(n)\}$$

(VI.4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Xi(n) = \min\{v_2(n), v_5(n)\}$$

(VI.5) Déterminer $\Xi(2025!)$.